# Экзамен по математическому анализу, 1 курс

6 мая 1998

*С. В. Дужин, С. М. Натанзон, С. В. Чмутов*

1. Докажите, что непрерывная функция на сфере $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ принимает равные значения в некоторой паре диаметрально противоположных точек.

2. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — гладкое отображение, переводящее точку $A=(1,0) \in \mathbb{R}^2_{x,y}$ в точку $B=(1,1) \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ и в окрестности этих точек заданное неявно соотношениями
$$\begin{aligned} x^3-3xy^2+u^3-3uv^2 &= -1,\\ 3x^2y-y^3+3u^2v-v^3 &= 2. \end{aligned}$$
Найдите матрицу Якоби отображения $\varphi$ в точке $A$ и отображения $\varphi^{-1}$ в точке $B$.

3. Укажите диффеоморфизм окрестности нуля в $\mathbb{R}^2$, приводящий функцию $f(x,y)=xy+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ к каноническому морсовскому виду.

4. Найдите все критические точки функции $x^3+y^3+z^3+u^3$ на поверхности, заданной в $\mathbb{R}^4$ уравнениями $x+y+z+u=0$ и $x^2+y^2+z^2+u^2=12$. Сколько среди них максимумов, минимумов и седел?

5. Вычислите объем тора, полученного вращением круга
$$\{x,y \mid (x-1)^2+y^2 \leqslant 1/4\}$$
вокруг оси $Oy$ в трехмерном пространстве с координатами $x$, $y$, $z$.

6. Сосчитайте интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx\ .$$

typeset by S. V. Duzhin, `duzhin@botik.ru`