Экзамен по математическому анализу, 1 курс

5 сентября 1998

С. В. Дужин

1) Сформулируйте и докажите лемму Морса.

2) Пусть $\mathbb{R}^4$ — пространство вещественных матриц размера 2×2, а отображение $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ переводит матрицу
$$X=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}.$$
в матрицу X^n. Сосчитайте матрицу Якоби и якобиан отображения f в точке
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
пользуясь системой координат x, y, z, t.

3) Определите число, расположение и тип критических точек функции
$$f(x,y)=\sin x\sin y$$
на периоде $[0,2\pi)\times[0,2\pi)$.

4) Проведите к эллипсоиду
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
в первом октанте такую касательную плоскость ABC (A, B, C — точки на осях координат), чтобы точка пересечения медиан треугольника ABC находилась от начала координат на наименьшем расстоянии.

5) Пусть T — половина полнотория, полученного вращением круга
$$(y-a)^2+z^2\leqslant b^2$$
вокруг оси Oz, лежащая в полупространстве $x\geqslant 0$. Найдите x-координату центра тяжести тела T. (*По определению, это отношение интеграла функции x к интегралу функции* 1 *по области* T).

6) Выразите интеграл
$$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
через Γ-функцию.

typeset by S. V. Duzhin, `duzhin@botik.ru`