Экзамен по математическому анализу, 1 курс

30 сентября 1998

С. В. Дужин

Продолжительность экзамена 3 астрономических часа. Для отличной оценки необходимо дать полное решение любых пяти их следующих семи задач.

1) Функция $f(x, y, z)$ имеет нулевой предел, когда точка (x, y, z) стремится к $(0, 0, 0)$ вдоль любой прямой. Вытекает ли отсюда, что функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точке $(0, 0, 0)$?

2) Найдите матрицу Якоби отображения, переводящего набор коэффициентов (a_1, a_2, a_3) многочлена $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ в набор его корней (x_1, x_2, x_3), в точке $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$. Корни выбираются так, что $x_1 < x_2 < x_3$ (заметим, что в окрестности данной точки $(-3, 2, 0)$ многочлен имеет 3 различных вещественных корня).

3) В условиях предыдущей задачи выпишите разложение в ряд Тейлора до второго порядка функции x_1 в окрестности данной точки.

4) Определите число, расположение и тип критических точек функции
$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$
на периоде $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

5) Найдите координаты центра тяжести полушара, заданного в $\mathbb{R}^n$ неравенствами
$$x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant 1; \quad x_n \geqslant 0.$$

6) Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $(2a, 2b, 2c)$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

7) На плоскости даны две замкнутые гладкие строго выпуклые кривые K_1 и K_2, причем K_1 лежит целиком внутри K_2. Касательная к K_1, проведенная в произвольной точке $A \in K_1$, пересекает кривую K_2 в двух точках B, C. Докажите, что точку $A \in K_1$ можно выбрать таким образом, что отрезок BC будет делиться этой точкой пополам.

typeset by S. V. Duzhin, `duzhin@botik.ru`