Экзамен по с/курсу «Комбинаторика»

22 сентября 1998 года В скобках указано количество баллов

Экзамен считается сданным, если набрано не менее 40 баллов.

1. (*5*) Найти асимптотику числа правильных скобочных выражений, в которых используется n пар скобок двух разных видов.

2. (*15*) Найти производящую функцию для числа перестановок $(a_1, \dots, a_n)$ n-элементного множества, удовлетворяющих условию
$$|a_i - i| \in \{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}.$$

3. (*10*) Доказать, что производящая функция $\sum I_n s^n$ для числа инволюций (перестановок, квадрат которых есть тождественная перестановка) равна бесконечной цепной дроби
$$\cfrac{1}{1-s-\cfrac{s^2}{1-s-\cfrac{2s^2}{1-s-\cfrac{3s^2}{1-s-\dots}}}}$$

4. (*10*) Пусть $\varepsilon_\Gamma(n)$ — число способов раскраски ребер графа Γ таких, что ребра одного цвета не имеют общих вершин. Доказать, что $\varepsilon_\Gamma(n)$ — многочлен от n.

5. (*15*) Найти число вложений в тор графа, состоящего из двух вершин и n ребер, соединяющих эти вершины.

6. (*15*) Пусть s_n — число симметричных таблиц Ферре размера n (самосопряженных разбиений числа n). Доказать
$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)\dots(1-x^{2k})}.$$