Экзамен по с/курсу «Комбинаторика»

20 мая 1998 года В скобках указано количество баллов

Экзамен считается сданным, если набрано не менее 40 баллов.

1. (*5*) Сколько путей, состоящих из отрезков вида (1;2) или (2;3), ведут из точки с координатами (0,0) в (30,50)?

2. (*15*) Доказать, что производящая функция для числа слов из 0 и 1 таких, что количество 0 и 1 в любом подслове различается не более, чем на 2, — рациональна, построить производящую грамматику и найти эту производящую функцию. (Подслово — фрагмент из подряд идущих символов.)

3. (*10*) Доказать, что число разбиений, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений, в которых каждая часть встречается не более трех раз.

4. (*10*) Хроматический многочлен n-вершинного графа Γ равен $(s-1)^n+(-1)^n(s-1)$. Доказать, что Γ — цикл на n вершинах.

5. (*20*) Доказать, что
$$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}\right)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}t^n}{(1-q)\dots(1-q^n)}.$$

6. (*10*) Рассмотрим вращение на графе икосаэдра, в котором ребра берутся через одно при обходе против часовой стрелки. Определить род соответствующего этому вращению вложения.