ТФКП. 2-ой (4-ый) семестр 1997/1998 учебного года.

Белошапка В.К., Кулаков А.Г., Немировский С.Ю.

Семинар 1.

Гармонические функции. 12.02.1998.

Задача 1. Пусть f функция, голоморфная в области D. Докажите, что $\Delta(\Re f) = 0$ в D, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Задача 2. Докажите, что $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$.

Определение 1. Функция $u(x, y) \in C^2(D)$ называется *гармонической*, если $\Delta u = 0$ в D.

Задача 3. Если u – гармонична в односвязной области D, то в D существует функция v такая, что $u + iv$ – голоморфна в D.

Задача 4. Если u – гармонична в произвольной области D, то $u = \Re f$, где f – аналитическая (возможно не однозначная) функция в D, причем

(1) f' – голоморфная в D;
(2) $\int_\gamma f dz$ – чисто мнимое число или 0 (γ – замкнутый контур).

Задача 5. f – голоморфная в D, $f : D \to G$, u – гармонична в G, тогда $u(f(z))$ – гармонична в D.

Задача 6. (Теорема единственности.) Если гармоническая функция равна нулю на открытом множестве, то она тождественно равна нулю. (Если u – гармонична в D и $\Omega \subset D, \Omega \neq \emptyset$ – открыто, $u|_\Omega = 0$, то $u = 0$ в D.)

Задача 7. В окрестности каждой точки гармоническая функция представляется в виде сходящегося степенного ряда от x и y.

Задача 8. Пусть H_d – пространство гармонических многочленов степени d от x и y. Найти $dim(H_d)$.

Задача 9. Докажите, что u гармонична в D тогда и только тогда, когда для любой точки $a \in U(a, r) \subset D$ выполнена одна из теорем о среднем:

(1) $u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\phi}) d\phi$;
(2) $u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-a|=r} u(z)|dz|$;
(3) $u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|\leq r} u(x, y) dx dy$.

Задача 10. Докажите, что в условиях предыдущей теоремы

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{1}{r\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\phi}) \cos\phi d\phi.$$

Задача 11. Докажите, что если последовательность u_n гармонических в области D функций равномерно сходится к функции u, то u гармоническая.

Задача 12. (Принцип максимума.) Докажите, что если гармоническая в области D функция u достигла во внутренней точке области нестрогого локального максимума (или минимума), то $u = constant'$е.

Задача 13. Пусть D – ограниченная область и функция u – гармонична в D и непрерывна в замыкании. Пусть $u|_{\partial D} = 0$. Докажите, что тогда $u = 0$.

Задача 14. u – гармонична в $\mathbb{C}$ и ограничена сверху (снизу). Тогда $u = const$.

Задача 15. Пусть u – гармонична в проколотой окрестности точки a. Докажите, что существуют константа λ и голоморфная в проколотой окрестности точки a функция f такие, что $u(z) = \lambda \ln |f(z)|$.

Задача 16. Сформулируйте теорему о классификации изолированных особых точек для гармонических функций.

Задача 17. Алгебраические свойства гармонических функций. Верно ли, что

(1) сумма двух гармонических – гармоническая?
(2) произведение двух гармонических – гармоническая?
(3) обратная к гармонической – гармоническая?
(4) если $f = u + iv$ – голоморфная, то $u^2 + 2uv - v^2$ – гармоническая?
(5) равномерный предел гармонических функций – функция гармоническая?

Задача 18. Пусть u – гармонична и u^2 – тоже. Докажите, что $u \equiv const$.

Семинар 2.

Задача Дирихле. 19.02.1998.

Определение 2. Задачей Дирихле в области D называется нахождение решения уранения $\Delta u = 0$ в D с заданным граничным условием $u|_{\partial D} = f$, где f (чаще всего, непрерывная) заданная функция.

Задача 1. Докажите, что решение задачи Дирихле, если существует, то единственно.

Задача 2. Пусть Δ – единичный круг. Пусть $z = re^{i\phi}, 0 \le r \le 1, \zeta = e^{it}$, и

$$K(z,\zeta) = \Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\phi)+r^2} \text{ – ядро Дирихле.}$$

Докажите, что

(1) K – непрерывна, $K \ge 0$;
(2) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(z,e^{it})dt = 1$;
(3) для непрерывной на единичной окружности действительнозначной функции $u(\zeta)$ функция $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt$ – голоморфна в $\{|z|<1\}$, а функция $\tilde{u}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\Re\frac{\zeta+z}{\zeta-z}dt$ – гармонична в $\{|z|<1\}$.

Задача 3. Докажите, что в условиях предыдущей задачи $\lim_{z\to\zeta_0}\tilde{u}(z) = u(\zeta_0)$.

Задача 4. Предположим, что $u(\zeta)$ – кусочно непрерывна на окружности, и во всех точках разрыва существуют односторонние пределы. Что можно сказать о $\lim_{z\to\zeta_0}$ в точке разрыва?

Задача 5. Пусть D – односвязная область, чья граница состоит из достижимых граничных точек, и u – непрерывная функция на множестве достижимых граничных точек. Докажите, что тогда решение задачи Дирихле существует.

Семинар 3.

Векторные поля на плоскости. 26.02.1998.

Пусть $\vec{w} = (p(x,y), q(x,y))$ – векторное поле на плоскости. Будем представлять его, как поле скоростей частиц жидкости.

Определение 3. "Количество" жидкости S, протекающей через контур γ за единицу времени, называется *потоком* и равно $S = \int_\gamma \vec{w}\cdot\vec{n}ds$, где ds – дифференциал длины дуги, а $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали.

Задача 1. Докажите, что

(1) $S = \int_\gamma -qdx + pdy$.
(2) В точке (x_0, y_0) отсутствует источник тогда и только тогда, когда в ней выполнено соотношение $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}$.

Определение 4. "Количество движения" жидкости R, текущей вдоль контура γ, называется *циркуляцией или вихрем* и равно $R = \int_\gamma \vec{w}\cdot\vec{\tau}ds$, где $\vec{\tau}$ – касательный вектор.

Задача 2. Докажите, что

(1) $R = \int_\gamma pdx + qdy$.
(2) В точке (x_0, y_0) отсутствует вихрь тогда и только тогда, когда в ней выполнено соотношение $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$.

Задача 3. Пусть в односвязной области D у поля w отсутствуют источники и вихри. Докажите, что в ней существует голоморфная функция $F(z)$ такая, что $\bar{F}'(z) = w(z)$.

Определение 5. Функция F из предыдущей задачи называется *комплексным потенциалом*, $u = \Re F$ – *потенциалом скоростей*, $v = \operatorname{Im} F$ – *функцией тока.*

Задача 4. Докажите, что течение жидкости происходит вдоль линий $v = const$ (они называются *линиями тока*) и $R + iS = \int_\gamma F'(z)dz$.

Задача 5. Описать картину течения жидкости и охарактеризовать особые точки для следующих комплексных потенциалов:

(1) $F(z) = \ln z$;
(2) $F(z) = \ln(\frac{z}{z-1})$;
(3) $F(z) = i\ln(\frac{z}{z-1})$;
(4) $F(z) = \frac{1}{z}$;

(5) $F(z) = \frac{1}{z^n}$;
(6) $F(z) = z^n$.

Задача 6.

(1) Объясните, почему установившемуся безвихревому течению с совмещенным источником - стоком (диполь) соответствует однозначный и однолистный комплексный потенциал. (Указание: это предельный переход типа $h \to 0$ для функции $\frac{1}{h} \ln \frac{z+h}{z-h}$.)
(2) Дайте качественное описание течения жидкости в простейшей неодносвязной области с диполем в точке a.

Задача 7. Однозначность и однолистность комплексного потенциала означают, что он задает конформное отображение области на ее образ. Что является образом в случае односвязной области? в случае простейшей неодносвязной области?

Задача 8. (Теорема Римана.) Выведите из существования в области установившегося безвихревого течения существование конформного отображения односвязной области на единичный круг.

Семинар 4.

Принцип компактности и доказательство теоремы Римана. 26.02.1998.

Определение 6. Семейство функций Φ в области D называется *равномерно ограниченным*, если для любого компакта $K \subset M$ существует константа $M = M(K)$ такая, что для $f \in \Phi$ и любой $z \in K$ следует, что $|f(z)| \leq M$ $(\forall f \in \Phi\ \forall z \in K \quad \Longrightarrow |f(z)| \leq M)$.

Определение 7. Семейство функций Φ в области D называется *равностепенно непрерывным*, если для любого компакта $K \subset\subset D$ и любого $\epsilon > 0$ существет $\delta > 0$ такая, что для любой $f \in \Phi$ и любых $z_1, z_2 \in K$ таких, что $|z_1 - z_2| \leq \delta$, следует, что $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \epsilon$ (δ из определения непрерывности не зависит от точек z_1, z_2 и от функции из семейства).

Задача 1. Доказать, что если семейство голоморфных функций $\Phi = \{f\}$ равномерно ограничено на D, то семейство их производных $\Phi' = \{f'\}$ тоже равномерно ограничено.

Задача 2. Доказать, что если семейство голоморфных функций Φ равномерно ограничено на D, то Φ – равностепенно непрерывно на D.

Задача 3. Пусть семейство голоморфных функций Φ равномерно ограничено на D, множество $E \subset D$ – всюду плотно в D и для любой последовательности $\{f_n\} \subset \Phi$ и для любого $a \in E$ последовательность $f_n(a)$ сходится, тогда f_n сходится равномерно на каждом компакте из D.

Определение 8. Семейство функций Φ в области D называется *предкомпактным в* D, если из любой последовательности $\{f_n\} \subset \Phi$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом компакте из D. Если, к тому же, любая сходящаяся подпоследовательность сходится к функции $f \in \Phi$, то семейство называется *компактным*. Другими словами, это определение предкомпактности и компактности в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах D.

Задача 4. (Теорема Монтеля.) Если семейство голоморфных функций Φ равномерно ограничено на D, то оно предкомпактно в D.

Определение 9. Функционал $\phi : \Phi \to \mathbb{C}$ называется *непрерывным*, если из равномерной сходимости последовательности f_n к f на любом компакте из D следует, что $\phi(f_n) \to \phi(f)$.

Задача 5. Пусть $\phi(f) = f^{(k)}(a)$ – значение k-ой производной функции f в точке $a \in D$. Докажите, что ϕ – непрерывен.

Задача 6. Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, и граница D содержит более одной точки. Докажите, что D конформно эквивалентна $\tilde{D} \subset \Delta = \{|z| < 1\}$.

Задача 7. (Теорема Гурвица.) Пусть последовательность голоморфных в D функций f_n сходится к $f \neq const$ равномерно на любом компакте, и пусть $f(a) = 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует N такое, что для любого $n > N$ функция $f_n(z)$ имеет нуль в множестве $\{|z - a| < \epsilon\}$.

Задача 8. Докажите, что если $\{f_n\}$ – однолистны в D и последовательность f_n сходится равномерно к f в D, то f либо однолистна, либо постоянна.

Экстремальная задача Римана. Поставим следующую экстремальную задачу. Пусть $D \subset \Delta, 0 \in D$, S – класс однолистных в D фукций таких, что $|f(z)| < 1, f(0) = 0, f'(0) > 0$ (последнее условие означает, что производная в нуле действительна и больше 0). Пусть точка $p \in D$ и $p \neq 0$. Найти $F \in S$ такую, что $|F(p)| = \max_S |f(p)|$.

Задача 9. Докажите, что решение экстремальной задачи Римана существует.

Задача 10. Пусть $q \in \Delta \backslash \{0\}$. Построить аналитическую в $\Delta \backslash q$ функцию $\psi_q(z)$ со следующими свойствами:

(1) ψ_q имеет в q точку ветвления 2-ого порядка;
(2) ψ_q взаимно-однозначно отображает свою риманову поверхность над Δ на Δ;
(3) для одного из двух элементов $\psi_q(0) = 0, \psi'(0) > 0$.

Докажите, что для любого $z \in \Delta \setminus \{0\} \quad |\psi_q(z)| > |z|$.
Задача 11. (Теорема Римана). Докажите, что функция F из задачи 9 конформно отображает D на (!) Δ.
Задача 12. Перенесите теорему Римана на области, расположенные на римановой поверхности.

Продолжение семинара 4.

Большая теорема Пикара в задачах.

Используемые обозначения:
$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ — единичный круг
$\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ — проколотый единичный круг
$\mathrm{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость
ρ — метрика Лобачевского в Δ и в H

Задача 1. Пусть $f : \Delta \to \Delta$ — голоморфное отображение, тогда f не увеличивает расстояние в метрике Лобачевского. (Указание: воспользоваться леммой Шварца.)

Определение. Пусть I — множество с дискретной топологией. Непрерывное отображение $p : X \to Y$ называется накрытием, если для любой точки $y \in Y$ найдется окрестность $U \ni y$ и гомеоморфизм $\psi : U \times I \xrightarrow{\approx} p^{-1}(U)$, для которого $p \circ \psi(y', i) = y'$ для всех $y' \in U, i \in I$.

Задача 2. Пусть $f : \Delta \to U \subset \mathbb{C}$ — голоморфное отображение, а $p : \Delta \to U$ — голоморфное накрытие. Доказать, что существует голоморфное отображение $\tilde{f} : \Delta \to \Delta$, для которого $p \circ \tilde{f} = f$. (Указание: воспользоваться теоремой о монодромии.)

Задача 3. Пусть $p : \Delta \to U$ — голоморфное накрытие. Доказать, что для любых двух однозначных в области $V \subset U$ ветвей s_1, s_2 аналитической функции p^{-1} существует единственный автоморфизм единичного круга g, для которого $g \circ s_1 = s_2$. (Указание: применить теорему о монодромии к $s_2 \circ s_1^{-1}$.)

Задача 4. Вывести из предыдущей задачи, что $p_* \rho := (p^{-1})^* \rho$ — корректно определенная метрика на U (т. е. не зависит от выбора ветви p^{-1}).

Задача 5. Пусть $p(z) = e^{-iz}$ — накрытие Δ^* полуплоскостью H. Проверьте, что

$$\rho^* := p_* \rho = \frac{dz\, d\overline{z}}{|z|^2 \ln^2 |z|}.$$

Докажите, что длина окружности $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ в этой метрике равна $\frac{2\pi}{|\ln r|}$.

Задача 6. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$ — два различных числа. Докажите, что существует голоморфное накрытие $\mu : \mathrm{H} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ (модулярная функция). (Указание: использовать принцип симметрии.)

Задача 7. Для функции $f \in \mathcal{O}(\Delta^*)$ положим

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r \in (0, 1).$$

Докажите, что если функция f не продолжается голоморфно в точку ноль, то $\lim\limits_{r \to 0} M(r, f) = \infty$. (Указание: применить принцип максимума.)

Задача 8. Докажите, наконец, *большую теорему Пикара*: голоморфная функция $f : \Delta^* \to \mathbb{C} \backslash \{a, b\}$ мероморфно продолжается в точку 0, т. е. не может иметь существенной особенности. Для этого
1) из задач 1 и 2 выведите, что отображение f не увеличивает расстояния в метриках ρ^* и $\mu_* \rho$;
2) из задачи 5 выведите, что если $\lim\limits_{r \to 0} M(r, f) = \infty$, то $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$, т. е. функция f имеет в точке 0 полюс.

Задача 9. Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ — целая функция и множество $\{z \mid f(z) = 0\}$ конечно и непусто. Докажите, что f принимает все значения.

Семинар 5.

Многозначные аналитические функции, алгебраические функции. 05.03.1998.

Задача 1. Пусть $f(z)$ – целая функция без нулей. Докажите, что $f(z) = e^{g(z)}$, где $g(z)$ – целая.
Задача 2. Пусть $f(z)$ – аналитична в проколотой окрестности $\dot{U}_a$ точки a и a – точка ветвления порядка n. Докажите, что $f(z) = g(\sqrt[n]{z-a})$, где $g(z)$ – аналитична в U_a.
Задача 3. Пусть $f(z)$ – аналитична в U_a, и

(1) $f'(z)$ – голоморфна в U_a. Докажите, что $f(z) = \lambda \ln(q(z))$, где $q(z)$ – голоморфна в U_a.
(2) $\Re f(z)$ – однозначна в U_a. Докажите, что $f(z) = \lambda \ln(q(z))$, где $q(z)$ – голоморфна в U_a.

Сравните с задачей 1.14.
Задача 4. Пусть функция $f(z)$ – аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек. Докажите, что во всех "неисключительных" точках $f(z)$ имеет одинаковое число значений (конечное или бесконечное).
Задача 5.

(1) Пусть функция $f(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ одну точку ветвления порядка 2. Сколько значений может иметь эта функция?
(2) Пусть аналитическая функция имеет в $\mathbb{C}$ две точки ветвления порядка 2. Сколько значений может иметь эта функция?

Определение 10. Точка ветвления a аналитической функции $f(z)$ называется *алгебраической*, если в проколотой окрестности $\dot{U}_a$ точки a она имеет вид $f(z) = g(\sqrt[n]{z-a})$, где $g(z)$ – имеет в a полюс (возможно порядка 0). Конечнозначная функция, имеющая в $\bar{\mathbb{C}}$ лишь конечное число алгебраических точек ветвления называется *алгебраической*.
Задача 6. Докажите, что однозначная алгебраическая функция рациональна.
Задача 7. Докажите, что все значения алгебраической функции удовлетворяют неприводимому полиномиальному уравнению.
Задача 8. Докажите утверждение обратное к утверждению задачи 7.
Задача 9. Нарисуйте схемы римановых поверхностей следующих алгебраических функций:

(1) $\sqrt{z} + \sqrt{z-1}$; $\sqrt[3]{z^2-1} + \sqrt{\frac{1}{z}}$; $\sqrt[3]{z} + \sqrt{z}$; $\sqrt[4]{z-1} + \sqrt{z^2-1}$; $\sqrt{z} + \sqrt{z}$; $\sqrt[4]{z^2} + \sqrt{z}$; $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z}$,
(2) $\sqrt[4]{z-1} \cdot \sqrt{z}$; $\quad \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt[4]{z+1}}$; $\quad \frac{\sqrt{z}+\sqrt{z}}{\sqrt[3]{z(z+1)}}$,
(3) $\sqrt{1-\sqrt{z-1}}$; $\quad \sqrt[3]{\sqrt{z}-2}$; $\quad \sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+z}} - \frac{1}{\sqrt{1-z}}}$;

и найдите соответствующие неприводимые полиномиальные уравнения.
Определение 11. Пусть $f(z)$ – m-значная алгебраическая функция с ветвлениями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Действие $\pi_1\left(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}\right)$ на элементах f порождает подгруппу в S_m. Эта подгруппа называется *группой монодромии* алгебраической функции f (или *группой Галуа* f). Будем обозначать ее $G(f)$.
Задача 10. Описать группы Галуа алгебраических функций

$$\sqrt[3]{z}; \quad \sqrt{z} + \sqrt{z}; \quad \sqrt{z} + \sqrt{z-1}; \quad \sqrt[3]{z} + \sqrt[5]{z-1}.$$

Задача 11. Докажите, что существует гомоморфизм $G(f) \times G(g) \xrightarrow{\text{на}} G(f * g)$, где $*$ – любое арифметическое действие.
Задача 12. Докажите, что существует гомоморфизм $G(\sqrt[n]{f}) \xrightarrow{\text{на}} G(f)$ с коммутативным ядром.
Задача 13. Докажите, что если $w = f(z)$ выражается в радикалах, то $G(f)$ разрешима.
Задача 14. Пусть $w = f(z)$ – алгебраическая функция, заданная соотношением $3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$.

(1) Найдите критические точки (по w) и соответствующие им точки ветвления (по z). (Ответ: $z = \pm 38, \pm 16$)
(2) Нарисуйте схему римановой поверхности.
(3) Докажите, что $f(z)$ не выражается в радикалах.

Этот пример взят из книги Алексеева "Теорема Абеля в задачах", в которой он разобран.

Семинар 6.

Теория функций на римановых поверхностях. 12.03.1998.

Задача 1. Дать определение голоморфной, меромофной, аналитической функций и 1-формы на римановой поверхности. Проверить корректность определения.

Задача 2. Доказать, что $\bar{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}/\{\omega_1, \omega_2\}$ являются компактными римановыми поверхностями.

Задача 3. Перенести на римановы поверхности классификацию изолированных особых точек голоморфных и аналитических функций. Дать определения кратности нуля и полюса, вычета мероморфной функции и 1-формы на римановой поверхности.

Задача 4. Сформулирвать и доказать

(1) теорему единственности,
(2) принцип максимума,
(3) интегральную формулу Коши,
(4) теорему о вычетах,
(5) принцип аргумента.

Задача 5. Доказать, что универсальная накрывающая римановой поверхности – риманова поверхность. Доказать, что универсальные накрывающие римановых поверхностей бывают трех типов. Перечислить их (см. задачу 4.12).

Задача 6. Доказать, что голоморфная функция на компактной римановой поверхности обязательно постоянна.

Задача 7. Доказать, что если ω – мероморфная 1-форма на компактной римановой поверхности, то $\sum res(\omega) = 0$.

Задача 8. Может ли на компактной римановой поверхности сущетвовать многозначная функция без особых точек?

Определение 12.

(1) *Дивизором* D на компактной римановой поверхности X называется конечный набор точек и целых чисел в них (т.е. $D = \{(P_i, n_i)\}$). Иногда дивизор обозначается аддитивно $D = n_1 P_1 + \cdots + n_k P_k$, а иногда мультипликативно $D = P_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot P_m^{n_m}$. Эти обозначения подчеркивают существование групповой структуры на множестве дивизоров. Число n_i называется *кратностью* дивизора D в точке P_i или, просто, кратностью.
(2) *Степенью* дивизора D называется $deg(D) = \sum_i n_i$.

Задача 9.

(1) Дайте определение дивизора мероморфной функции f. Он обозначается (f).
(2) Дайте определение дивизора мероморфной 1-формы ω. Он обозначается (ω).

Задача 10. Докажите, что на компактной римановой поверхности X у любой мероморфной функции f число нулей равно числу полюсов (т.е. $deg((f)) = 0$).

Задача 11. Докажите, что на компактной римановой поверхности X для любых мероморфных 1-форм ω_1, ω_2 выполнено равенство $deg((\omega_1)) = deg((\omega_2))$. Чему равно это число для римановых поверхностей $\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}/\{\omega_1, \omega_2\}$?

Определение 13. Число $deg((\omega))$ обозначается $g(X)$ и называется *родом* (арифметическим) римановой поверхности X.

Определение 14. Пусть на римановой поверхности X задан дивизор D. Обозначим $\mathcal{O}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) | (f) \geq -D\}$. Неравенство между дивизорами понимается, как поточечное между кратностями дивизоров в точках. Если точка не входит в какой-то дивизор, то кратность в ней считается равной 0.

Задача 12. Докажите, что для любого D множество $\mathcal{O}(D)$ – это конечномерное векторное пространство (т.е. $dim\mathcal{O}(D) \leq \infty$).

Теорема Римана-Роха. Для любого дивизора D на компактной римановой поверхности X $dim\mathcal{O}(D^{-1}) = dim\mathcal{O}(D) + deg(D) - g(X) + 1$.

Задача 13. Выведите из теоремы Римана-Роха, что любая компактная риманова поверхность X рода $g = 0$ голоморфно эквивалентна $\bar{\mathbb{C}}$.

Продолжение семинара 6.

Алгебраические кривые в $\mathbb{C}^2$. 12.03.1998.

Определение 15. *Алгебраической кривой* в $\mathbb{C}^2$ называется множество нулей многочлена от двух переменных $X = \{P(z,w) = 0\}$. *Проективизацией кривой* X называется кривая $\hat{X}$ в $\mathbb{CP}^2$, заданная в однородных координатах $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ уравнением $\xi_0^n P(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}) = 0$, где n – степень многочлена P. Кривая $\hat{X}$ называется *неособой*, если в каждой координатной карте на $\mathbb{CP}^2$ выполнено $gradP = (\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial w})|_{\hat{X}} \neq 0$.
Задача 14. Пусть X неособая алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$. Докажите, что X является одномерным компактным комплексным многообразием и, следовательно, сферой с g ручками. Число g назыается *родом* (топологическим) X.
Задача 15. Рассмотрим слоение (что бы это ни значило) $\mathbb{C}^2$ на линии уровня многочлена $P(z,w) = z^2 + w^2$.

(1) Найдите особые уровни.
(2) Найдите род проективизации неособого уровня в $\mathbb{CP}^2$.

Задача 16. Пусть

(1) $X = \{P(z,w) = 0\}$ – неособая кривая, являющаяся графиком над $\mathbb{CP}^1$ алгебраической функции $w = f(z)$,
(2) m – число значений этой функции (число листов или степень накрытия в общей точке),
(3) n – число точек ветвления,
(4) $k_1, \ldots, k_n$ – кратности ветвлений.

Докажите формулу Римана-Гурвица для рода g кривой X:

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i - 1}{2} - m.$$

Задача 17. Найдите группу кос следующих алгебраических функций

$$\sqrt{z}; \sqrt{z^2}; \sqrt{z^3}; \sqrt{z^2 - 1}; \sqrt{z} + \sqrt{z-1}.$$

Продолжение семинара 6.

Комплексные прямые и вещественные двумерные плоскости в $\mathbb{C}^2$.
12.03.1998.

Определение 16. Примем некоторые соглашения. Под прямой мы будем понимать комплексную прямую, а под плоскостью – двумерную вещественную плоскость, не являющуюся комплексной прямой. Введем в $\mathbb{C}^2$ координаты $z = x + iy, w = u + iv$.
Задача 18. Как могут пересекаться в $\mathbb{C}^2$

(1) две прямые,
(2) две плоскости,
(3) прямая и плоскость?

Приведите примеры.
Задача 19. Докажите, что любую плоскость комплексно-линейным преобразованием можно перевести в $\mathbb{R}^2 = \{y = 0, v = 0\}$.
Задача 20. Как прямая l, проходящая через 0, пересекает $S^3 = \{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$?
Задача 21. Чем является множество $T_\epsilon = \{|z|^2 = \epsilon, |w|^2 = 1 - \epsilon\}$ для различных значений $\epsilon \in [0,1]$? Докажите, что для любой прямой l пересечение $l \cap S^3$ целиком лежит в одном из таких множеств.
Задача 22. Попробуем представить себе, как на S^3 расположены пересечения всех прямых, проходящих через 0. Рассмотрим стереографическую проекцию S^3 из точки $(0,i) = (0,0,0,1)$ на пространство $\mathbb{R}^3 = \{v = 0\}$ (с теми же координатами (x,y,u)). Докажите, что

(1) Стереографическую проекцию можно рассматривать, взяв двумерное или трехмерное сечение, проходящее через ось $0v$.
(2) Окружность $O_w = \{|w| = 1, z = 0\} \subset S^3$ при этой проекции перейдет в $\mathbb{R}^3$ в ось $0u$.
(3) Окружность $O_z = \{|z| = 1, w = 0\} \subset S^3$ при этой проекции перейдет в $\mathbb{R}^3$ в окружность $s_1 = \{u = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.
(4) Найдите множество $K = T_\epsilon \cap \mathbb{R}^3\{x,u,v\}$. Во что оно переходит при стереографической проекции?

(5) Докажите, что стереографическая проекция T_ϵ – это тор, полученный вращением стереографической проекции K вокруг оси $0u$. Как расположены эти торы для различных ϵ?

(6) Докажите, что $l \cap S^3$ реализует $(1,1)$-обмотку тора T_ϵ.

Задача 23. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ пересечение $K_{2,3} = S^3 \cap \{(z,w) | z^2 + w^3 = 0\}$. Докажите, что $K_{2,3} \subset T_\epsilon$. Нарисуйте $K_{2,3}$ на развертке T_ϵ и в пространстве $\mathbb{R}^3$ после стереографической проекции.

Семинар 7.

Голоморфные функции нескольких комплексных переменных. 19.03.1998.

Пусть $f(z_1,\ldots,z_n)$ – комплекснозначная функция n комплексных переменных, определенная в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Функцию f можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$. Пусть f $\mathbb{R}$-дифференцируема, т.е. у f существует полный дифференциал, как у отображения $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$.

Задача 1. Докажите, что $df = \partial f + \bar\partial f$, где ∂f – комплексно линейная, а $\bar\partial f$ – антикомплексно линейная части df. Найдите выражения для ∂f и $\bar\partial f$.

Определение 17. $\mathbb{R}$-дифференцируемая в некоторой точке a функция f называется *$\mathbb{C}$-дифференцируемоей*, если $\bar\partial f(a) = 0$. Если f $\mathbb{C}$-дифференцируема в каждой точке области D, то она называется *голоморфной*.

Задача 2. Докажите, что если f голоморфна как функция нескольких переменных, то она голоморфна по каждому переменному, как функция одного переменного.

Задача 3. Запишите условие $\bar\partial f = 0$ в виде дифференциальных соотношений на вещественную и мнимую части f.

Задача 4. Каким соотношениям должна удовлетворять вещественная функция $u(z_1,\ldots,z_n)$, чтобы существовали окрестность U_a точки a и функция $v(z_1,\ldots,z_n)$ такие, что функция $u + iv$ голоморфна в U_a?

Определение 18. Функции u и v, удовлетворяющие условиям предыдущей задачи называются *плюригармоническими*, а функция v называется *сопряженной* к u.

Задача 5. Является ли плюригармоническая функция n переменных $z_1,\ldots,z_n$ гармонической от $2n$ переменных? Верно ли обратное утверждение?

Задача 6. Сформулировать и доказать комплексные варианты теоремы об обратном отображении и теоремы о неявной функции.

Определение 19. *Открытым полидиском* называется множество

$$\Delta(a,r) = \{(z_1,\ldots,z_n) | \quad |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1,\ldots,n\}.$$

Задача 7. Пусть f голоморфна в D и полидиск $\Delta(a,r)$ содержится в D. Докажите кратную формулу Коши

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_j - a_j| = r_j} \frac{f(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_j - a_j| = r_j} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta.$$

Задача 8. Получите из формул Коши представление голоморфной функции в виде ряда

$$f(z) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \ldots (z_n - a_n)^{m_n}.$$

Докажите, что ряд сходится абсолютно и равномерно в любом замкнутом полидиске $\Delta(a,r') \subset\subset \Delta(a,r)$.

Замечание. Это снимает необходимость указывать порядок суммирования.

Задача 9. Пусть $M(r_1,\ldots,r_n)$ – максимум модуля функции f на остове полидиска. Докажите неравенства Коши

$$|c_{m_1,\ldots,m_n}| \le \frac{M(r_1,\ldots,r_n)}{r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}},$$

и, как следствие, докажите теорему Лиувилля.

Задача 10. (Кратный вариант леммы Абеля.) Пусть общий член кратного степенного ряда ограничен в точке $(w_1,\ldots,w_n)$ т.е. существует константа M такая, что $|c_{m_1,\ldots,m_n}(w_1 -$

$a_1)^{m_1}\cdots(w_n-a_n)^{m_n}|\le M$. Тогда ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из $\Delta(a,|w-a|)$.
Определение 20. *Область сходимости* кратного степенного ряда – это внутренность множества точек, в которых этот ряд сходится абсолютно.
Задача 11. Докажите, что если точка $(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$ принадлежит области сходимости, то и точка $(a_1+e^{i\phi_1}b_1,\ldots,a_n+e^{i\phi_n}b_n)$ тоже принадлежит области сходимости для любых $(\phi_1,\ldots,\phi_n)$.
Замечание. Такие области изображаются в пространстве $\mathbb{R}^n(|z_1-a_1|,\ldots,|z_n-a_n|)$. Образ области в этом пространстве называется *диаграммой Хартогса.*
Определение 21. Набор $r=(r_1,\ldots,r_n)$ называется *набором сопряженных радиусов сходимости* кратного степенного ряда, если

(1) $\Delta(a,r)$ принадлежит области сходимости,
(2) для любого $q>1$ существует k такой, что $\Delta(a,r')$, где $r'=(r_1,\ldots,qr_k,\ldots,r_n)$, не принадлежит области сходимости.

Задача 12. Докажите, что если точка z принадлежит области сходимости, то существует набор сопряженных радиусов $(r_1,\ldots,r_n)$ такой, что $z\in\Delta(a,r)$. Это означает, что область сходимости есть объединение таких полидисков.
Задача 13. Рассмотрим отображение области сходимости ряда $\Omega\to\mathbb{R}^n$ вида $(z_1,\ldots,z_n)\to(\ln|z_1|,\ldots,\ln|z_n|)$. Докажите, что

(1) образ Ω – выпуклое множество (это свойство области называется *логарифмической выпуклостью*);
(2) сумма кратного степенного ряда голоморфна в области сходимости.

Замечание. Это утверждение замыкает цепочку эквивалентных определений голоморфности

$$\bar\partial f=0 \quad\Longrightarrow\quad \text{Формула Коши} \quad\Longrightarrow\quad \text{Представление степенным рядом} \quad\Longrightarrow \bar\partial f=0.$$

Задача 14. Если f представлена сходящимся степенным рядом, то это – ее ряд Тейлора.
Задача 15. Дать определения, формулировки (по аналогии с теоремами из одного комплексного переменного) и доказать следующие утверждения.

(1) Теорема единственности.
(2) Принцип максимума.
(3) Принцип открытости для функций. Остается ли верным принцип открытости для голоморфных отображений?
(4) Теорема Вейерштрасса о равномерном пределе.
(5) Теорема Монтеля (принцип компактности).
(6) Определение полной аналитической функции.
(7) Определение римановой области, т.е. определение n-мерного комплексного многообразия, на которое аналитическая функция поднимается как голоморфная.

Семинар 8.

Голоморфное продолжение. 26.03.1998.

Задача 1. Пусть $D=\Delta(0;(1,0.1))\cup\Delta(0;(0.1,1))$ – область в $\mathbb{C}^2$. Докажите, что все(!) функции голоморфные в D продолжаются в большую область.
Задача 2. (Теорема Хартогса.) Пусть функция f голоморфна вне некоторого компакта $K\subset\subset\mathbb{C}^2$. Тогда она голоморно продолжается на все $\mathbb{C}^2$.
Задача 3. Пусть f голоморфна в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{C}^2$. Докажите, что f голоморфно продолжается в начало координат.
Задача 4. Докажите, что у голоморфной функции нескольких переменных не бывает изолированных нулей.
Задача 5. Верно ли, что функция, голоморфная в окрестности остова полидиска, обязана голоморфно продолжаться на весь полидиск?
Рассмотрим следующее "доказательство" того, что функция, голоморфная в окрестности остова полидиска, голоморфно продолжается на весь полидиск?
Положим

$$F(z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{|\zeta_1|=1}\int_{|\zeta_2|=1}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)},$$

где f – данная функция. Тогда F – искомое продолжение.
Задача 6. Что в предыдущем рассуждении неверно?
Задача 7. Превратите это рассуждение в доказательство того, что функция, голоморфная в фигуре Хартогса, голоморфно продолжается в весь полидиск?
Определение 22. Область D называется *областью голоморфности*, если в D существует голоморфная функция f, которая не продолжается аналитически ни по одному пути, пересекающему границу D.
Задача 8. Приведите примеры областей, не являющихся областями голоморфности.
Задача 9. Докажите, что

(1) Любая область в $\mathbb{C}^1$ – область голоморфности.
(2) Выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ – область голоморфности.
(3) Декартово произведение областей голоморфности – область голоморфности.

Продолжение семинара 8.

Голоморфная выпуклость. 26.03.1998.

Определение 23. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область, $K \subset\subset D$ – компакт в ней, а $\mathcal{F}$ – фиксированный класс функций в D.

(1) *Оболочкой* K относительно $\mathcal{F}$ называется множество $\hat{K} = \{z \in D | \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(z)| \leq \max_K |f|\}$.
(2) Если $\hat{K} = K$, то говорят, что K – это *$\mathcal{F}$-выпуклый компакт*.
(3) Если для любого $K \subset\subset D$ оболочка $\hat{K} \subset\subset D$, то говорят, что D является *$\mathcal{F}$-выпуклой областью*.

Задача 10. (Мотивация предыдущих определений.) Рассмотрим области не в $\mathbb{C}^n$, а в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\mathcal{F}$ – класс действительнозначных линейных функций. Что такое оболочка двух точек в этом классе? Что такое "выпуклость" компакта и области в этом классе?
Вернемся в $\mathbb{C}^n$.
Задача 11. Пусть $\mathcal{F}$ – класс комплексно линейных функций. Что такое оболочка в этом классе? Что такое "выпуклость" компакта и области в этом классе?
Задача 12. Пусть $\mathcal{F}$ – класс комплексных полиномов.

(1) Привести пример не выпуклого компакта.
(2) Привести пример выпуклого в этом классе компакта (*полиномиально выпуклого*), но не линейно выпуклого.

Задача 13. Доказать, что если D $\mathcal{F}$-выпукла, то $D = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$, где K_i – это $\mathcal{F}$-выпуклый компакт и $K_i \subset K_{i+1}$. (Последовательность компактов с такими свойствами называется *исчерпанием*).
Определение 24. Пусть $f_1, \ldots, f_s$ – голоморфные (полиномиальные) функции в D и область $\Omega = \{z \in D \mid |f_j(z)| < 1, \ j+1, \ldots, s\}$ – относительно компактна в D. Тогда Ω называется *аналитическим (полиномиальным) полиэдром*. Полиномиальный полиэдр называется еще *полиэдром Вейля.*
Задача 14. Докажите, что полиэдр

(1) голоморфно выпуклая область;
(2) область голоморфности.

Задача 15. Докажите, что любой линейно выпуклый компакт K представляется как пересечение компактных аналитических полиэдров ($K = \cap_1^{\infty} P_j$, где P_j – полиэдры Вейля).
Задача 16. Докажите, что если D голоморфно выпуклая, то D область голоморфности.
Задача 17. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$. Определим для каждой точки $z \in D$ число $d(z) = \sup\{\epsilon | \Delta(z;\epsilon) = \Delta(z;(\epsilon,\ldots,\epsilon)) \subset D\}$ и $d(K) = \inf_{z \in K} d(z)$.

(1) Пусть K-компакт в D и $z \in \hat{K}$. Докажите, что для любой $f \in \mathcal{O}(D)$ степенной ряд f сходится в $\Delta(z; d(K))$.
(2) Если D область голоморфности, то она голоморфна выпукла. Причем для любого $K \subset D$ выполнено $d(K) = d(\hat{K})$.

Задача 18.

(1) Докажите, что компакт $K \subset\subset \mathbb{C}$ голоморфно выпуклый тогда и только тогда, когда $\mathbb{C} \setminus K$ связно.
(2) Приведите пример не голоморфно выпуклого компакта в $\mathbb{C}^2$ со связным дополнением.

Задача 19. Пусть $K \subset\subset U$ — голоморфно выпуклый компакт и $z \in U \setminus K$. Тогда $K \cup \{z\}$ — это также голоморфно выпуклый компакт.

Семинар 9.

Принцип непрерывности. 02.04.1998.

Определение 25.

(1) *Аналитическим диском* $\mathcal{D}$ называется образ единичного круга $\Delta = \{t \in \mathbb{C} | |t| \leq 1\}$ при голоморфном непостоянном отображении.

(2) Образ окружности называется *границей аналитического диска* $\partial\mathcal{D}$.

(3) *Семейством аналитических дисков* называется непрерывное отображение $\phi_\tau = \phi(t, \tau)$: $\Delta \times [0, 1] \to \mathbb{C}^n$, где $\tau \in [0, 1]$ вещественный параметр и для любого τ ϕ_τ аналитический диск.

Задача 1. Пусть f голоморфна в окрестности аналитического диска $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^n$, $p \in \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ внутренняя точка и $|f(p)| = \max_{\mathcal{D}} |f|$. Тогда f постоянна на $\mathcal{D}$.

Задача 2. Докажите, что если Ω – область, $K \subset\subset \Omega$ – компакт, $\mathcal{D}$ – аналитический диск и $\mathcal{D} \subset K$, то $\mathcal{D} \subset \hat{K}$.

Задача 3. Докажите, что если f голоморфна в окрестности аналитического диска $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ и для любой $p \in \partial\mathcal{D}$ степенной ряд f сходится в $\Delta(p; (r, \ldots, r))$, $\quad r > 0$, то он сходится в таком же полидиске и для любой $p \in \mathcal{D}$.

Задача 4. (Принцип непрерывности.) Докажите, что если $\mathcal{D}$ – аналитический диск в области голоморфнсти Ω, то $d(\mathcal{D}) = d(\partial\mathcal{D})$.

Задача 5. Покажите, как голоморфное продолжение из фигуры Хартогса можно построить по принципу непрерывности.

Задача 6. Куда можно продолжить все голоморфные функции

(1) из окрестности сферы S^3?

(2) из окрестности полусферы $\{u = 0, v > 0, x^2 + y^2 + v^2 = 1\}$?

Задача 7. Любая функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2)$ голоморфно продолжается на все $\mathbb{C}^2$. (Указание: использовать семейство дисков вида

$$D_t = \Big\{ \big(z, \frac{2iz}{z - 2i} + it\big) \mid z \in \bar{\Delta} \Big\}, \quad t \geq 0,$$

для продолжения f в точку $(0, 0)$.)

Задача 8. (Теорема о вложенном ребре.) Используя то же самое семейство дисков, доказать, что любая функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \{y \leq 0, v \leq 0\})$ голоморфно продолжается в окрестность “острия” $\mathbb{R}^2$.

Задача 9. Обобщить все утверждения предыдущих двух задач на случай $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$.

Задача 10. Верно ли, что результат продолжения однозначной функции по принципу непрерывности будет однозначной функцией

(1) в ситуации задачи 6?

(2) в следующем примере?

Семинар 10.

Гиперповерхности. Форма Леви. 09.04.1998.

Пусть ρ – гладкая вещественная функция в окрестности U начала координат в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\rho(0) = 0$, а $d\rho(0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции $\Gamma = \{\zeta \in U | \rho(\zeta) = 0\}$ – гладкая гиперповерхность.

Задача 1. Написать уравнения определяющие

(1) вещественную касательную гиперплоскость;

(2) ее комплексную часть (комплексную касательную гиперплоскость).

Задача 2.

(1) Можно ли выбрать линейные координаты в $\mathbb{C}^{n+1}, (z_1, \ldots, z_n, w)$, где $w = u + iv$ так, что уравнение вещественной касательной гиперплоскости к Γ в нуле будет иметь вид $\operatorname{Im} w = 0$, а ее комплексной части $w = 0$?

(2) Докажите, что в этих координатах уравнение Γ можно записать в виде $v = F(z, \bar{z}, u)$, где F – гладкая вещественная функция и $F(0) = 0, \quad dF(0) = 0$.

Задача 3. Пусть S^3 – сфера в $\mathbb{C}^2$ и $\rho = |z|^2 + |w|^2 - 1$.

(1) Докажите, что существует дробно-линейное преобразование $\mathbb{C}^2$, переводящее сферу в квадрику $\{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$.
(2) Докажите, что существует квадратичное преобразование, переводящее квадрику в трубку $u = x^2$.

Определение 26. *Формой Леви* гиперповерхности $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \rho(z, \bar z) = 0\}$ в точке $\xi \in \Gamma$ называется ограничение эрмитовой формы

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} dz_\alpha \otimes d\bar z_\beta$$

на комплексную касательную плоскость к Γ в этой точке ξ.

Задача 4. Докажите, что если $\rho = -v + F(z, \bar z, u)$ из задачи 2.(2), то форма Леви в начале координат это

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}(0) z_\alpha \cdot \bar z_\beta.$$

Задача 5. Выпишите форму Леви следующих гиперповерхностей

(1) $\{v = \operatorname{Im} z_1 \bar z_2\}$ в точке $(0, 1, 1)$,
(2) $\{|z|^2 + |w|^2 - 1 = 0\}$ в точке $(0, 1)$,
(3) $\{|z|^2 - |w|^2 - 1 = 0\}$ в точке $(1, 0)$.

Задача 6. Докажите, что если форма Леви Γ в начале координат имеет хотя бы один отрицательный квадрат, то любая функция голоморфная в области $D_- = \{(z, w) | v > F(z, \bar z, u)\}$ продолжается через начало координат в область $U \cap D_+$, где $D_+ = \{(z, w) | v < F(z, \bar z, u)\}$.

Задача 7. Докажите, что если $D = \{\rho < 0\}$ – область голоморфности с гладкой границей класса C^2, то форма Леви границы $\partial D = \{\rho = 0\}$ в каждой точке неотрицательно определена.

Задача 8. Пусть $H_\rho(\zeta, \bar\zeta)$ – эрмитова часть 2-ого дифференциала функции ρ (комплексный гессиан). Сделаем обратимую голоморфную замену переменных $\xi = \xi(\zeta)$. Как связаны гессианы функции ρ в координатах ζ и ξ?

Задача 9. Пусть $\tilde\rho = \alpha \cdot \rho$, где α – гладкая функция не равная 0. Как связаны формы Леви $\{\rho = 0\}$ и $\{\tilde\rho = 0\}$?

Определение 27. Будем говорить, что (Γ_1, ξ_1) эквивалентна (Γ_2, ξ_2), где Γ_j – гиперповерхность, $\xi_j \in \Gamma_j$, если в окрестности U_{ξ_1} существует голоморфное обратимое (биголоморфное) отображение $f : U_{\xi_1} \to \mathbb{C}^n$ такое, что $f(U_{\xi_1} \cap \Gamma_1) \subset \Gamma_2$ и $f(\xi_1) = \xi_2$.

Задача 10. Доказать, что следующие пары гиперповерхностей не эквивалентны ни в каких точках.

(1) $\{v = |z|^2\}$ и $\{v = 0\}$;
(2) $\{|z|^2 + |w|^2 = 1\}$ и $|z| = 1\}$;
(3) $\{v = |z_1|^2 + |z_2|^2\}$ и $\{v = |z_1|^2 - |z_2|^2\}$.

Семинар 11.

Биголоморфные отображения. 16.04.1998.

Определение 28. *Биголоморфным* отображением $f : D_1 \to D_2$ называется взаимно однозначное голоморное отображение D_1 на D_2, такое что обратное отображение также голоморфно. Области D_1 и D_2 называются *биголоморфно эквивалентными*.

Задача 1. Докажите, что биголоморфный образ области голоморфности – область голоморфности.

Задача 2. Докажите, что группы биголоморфных автоморфизмов эквивалентных областей изоморфны.

Задача 3. (А. Картан.) Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ (или эквивалентная ограниченной), $\xi \in D$, f – автоморфизм D такой, что $f(\xi) = \xi$ и $f'(\xi) = Id$, тогда $f = Id$.

Задача 4. Проверьте, что следующие дробно-линейные преобразования $\mathbb{C}^2$ преводят $Q = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ в себя

(1) $z \mapsto z + p, w \mapsto w + 2iz \cdot \bar p + q, \quad \forall (p, q) \in Q$;
(2) $z \mapsto \lambda z, w \mapsto |\lambda|^2 w, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(3) $z \mapsto \frac{z+aw}{1-2i\bar{a}z-i|a|^2w}, w \mapsto \frac{w}{1-2i\bar{a}z-i|a|^2w}, \quad \forall a \in \mathbb{C};$
(4) $z \mapsto \frac{z}{1-rw}, w \mapsto \frac{w}{1-rw}, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Докажите, что преобразования из предыдущей задачи отображают $Q_+ = \{\operatorname{Im} w > |z|^2\}$ в себя и действуют там транзитивно, т.е. любую точку переводит в любую.
Задача 6. Докажите, что группа $AutB$, где $B = \{|z|^2 + |w|^2 < 1\}$ шар, действует на шаре транзитивно (см. задачу 10.3).
Определение 29. Функция $\|\cdot\| : C^n \to \mathbb{R}_+$ называется $\mathbb{C}$-*нормой* или просто нормой, если

(1) $\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{C}^n;$
(2) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|, \quad \forall\ a \in \mathbb{C}^n, \forall\ \lambda \in \mathbb{C};$
(3) $\|a\| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Примеры:

(1) $\|a\|_1 = \sqrt{\sum |a_j|^2};$
(2) $\|a\|_2 = \max |a_j|;$
(3) $\|a\|_3 = \sum |a_j|;$
(4) $\|a\|_4 = \max\{|\Re a_j|, |\operatorname{Im} a_j|\}$, и т.д.

Задача 7. (Принцип максимума.) Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{C}^m$ – голоморфное отображение, $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbb{C}^m$, $a \in D$ и $\|f\|$ достигает в точке a максимум. Тогда существуют $(\lambda_1, \dots, \lambda_2) \neq 0$ такие, что

$$\sum \lambda_j f_j(z) = const, \quad \text{и } \|f(z)\| = const \quad \text{в области } D.$$

Задача 8. (Лемма Шварца.) Пусть $B_1 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\|_1 < 1\}, \quad B_2 = \{w \in \mathbb{C}^m \mid \|w\|_2 < 1\}$ и f – голоморфное отображение $B_1 \to B_2$ такое, что $f(0) = 0$, тогда для любого $z \in B_1, \quad \|f(z)\|_2 \le \|z\|_1$.
Задача 9. Пусть f – автоморфизм единичного шара в $\mathbb{C}^2$ такой, что $f(0,0) = (0,0)$. Доказать, что $f'(0,0)$ – унитарное отображение $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.
Задача 10. Докажите, что $AutB$ – это подгруппа группы дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^2$, и она изоморфна $AutQ_+$. В частности, $dim_{\mathbb{R}} AutB = 8$.
Задача 11. Докажите, что группа $Aut\Delta_2$, где $\Delta_2 = \{|z| < 1, |w| < 1\}$ – бидиск, порождена

(1) $z \mapsto \phi(z), \quad w \mapsto \psi(w)$, где ϕ, ψ – автоморфизмы круга в $\mathbb{C}$;
(2) $z \mapsto w, w \mapsto z$.

Задача 12. (Следствие 1.) $dim_{\mathbb{R}} Aut\Delta_2 = 6$.
Задача 13. (Следствие 2.) Докажите, что B_2 биголоморфно не эквивалентен Δ_2.

Семинар 12.

Полиномиальная выпуклость. 23.04.1998.

Определение 30.

(1) *Полиномиально выпуклой оболочкой* компакта $K \subset\subset \mathbb{C}^n$ называется $hull(K) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall$ полинома $P \quad |P(z)| \le \|P\|_K\}$.
(2) Если $hull(K) = K$, то K называется *полиномиально выпуклым.*
(3) Область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется *полиномиально выпуклой*, если для любого $K \subset\subset \Delta$ $hull(K) \subset D$.

Задача 1. Докажите, что $hull(K)$ – компакт.
Задача 2. Докажите, что если D – полиномиально выпукла, то D – область голоморфности.
Задача 3. Докажите, что если $K \subset \mathbb{C}$, то $hull(K) = K \cup \{$ограниченные компоненты$\mathbb{C} \setminus K\}$.
Задача 4. Пусть Δ – аналитическая пленка (т.е. образ замкнутой области из $\mathbb{C}^1$), такая что $\partial\bar{\Delta} \subset K$, тогда $\Delta \subset hull(K)$.
Задача 5. Найдите $hull(S^+)$, где S^+ – верхняя полусфера, $S^+ = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1, \Re z_1 \ge 0\}$.
Задача 6. Докажите, что выпуклый компакт является полиномиально выпуклым.
Задача 7.

(1) Докажите, что равномерно сходящаяся на K последовательность полиномов, также равномерно сходится на $hull(K)$.
(2) Докажите, что любая функция, которую можно с любой точностью равномерно прибизить на K полиномами, имеет голоморфное продолжение на внутренность $hull(K)$.

Напомним (определение 24), что полиномиальным полиэдром называется ограниченная область типа $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |P_j(z)| < 1, j = 1, \dots, N\}$.
Задача 8. Докажите, что если K – полиномиально выпуклый компакт, то $K = \cap_{m=1}^{\infty} D_m$, где D_m – полиномиальные полиэдры.

Имеется интегральная формула Вейля (см., например, Б. В. Шабат, часть II), используя которую, можно доказать, что любая функция голоморфная в полиномиальном полиэдре может быть приближена на компактном подмножестве полиномами с любой точностью.

Задача 9. Пусть K_1, K_2 – два полиномиально выпуклых связных компакта и $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Докажите, что тогда либо $K_1 \cup K_2$ – полиномиально выпукло, либо $hull(K_1 \cup K_2)$ – связно.
Задача 10. Докажите, что если K_1, K_2 – два выпуклых непересекающихся компакта, то $K_1 \cup K_2$ – полиномиально выпукло.
Задача 11. Используя задачу 4, привести пример двух полиномиально выпуклых непересекающихся компактов таких, что $K_1 \cup K_2$ не является полиномиально выпуклым.

Задачи экзамена по комплексному анализу.

МНУ, 2-й курс, 4-й семестр, 07.05.1998.

В.К. Белошапка, А.Г. Кулаков, С.Ю. Немировский.

1. Пусть функция $u(x, y)$ гармонична и ограничена в проколотой окрестности точки. Доказать, что она гармонически продолжается в полную окрестность.
2. Пусть для целой функции $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ множество ее нулей $\{z \mid f(z) = 0\}$ конечно и непусто. Тогда f принимает все значения.
3. Дана функция $w = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+z}} - \frac{1}{\sqrt{1-z}}}$. Нарисовать схему римановой поверхности и найти ее род.
4. Пусть $X_k = \frac{\mathbb{C}^*}{z \sim kz}$, где $k > 0$, — риманова поверхность.
   (1) (a) Доказать, что X_2 конформно неэквивалентно X_3.
   (2) (b) Найти соотношение между k_1 и k_2 необходимое и достаточное для эквивалентности X_{k_1} и X_{k_2}.

5. Пусть γ — гладкое вещественно $(n+1)$-мерное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ с краем σ, и пусть $\omega = f(z)\, dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ — дифференциальная форма степени n, где функция f голоморфна в окрестности γ. Доказать, что $\int_\sigma \omega = 0$.
6. Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C}^2$ и
   (1) (a) постоянна на сфере $S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$;
   (2) (b) постоянна по модулю на этой сфере;
   (3) (c) постоянна на $\mathbb{R}^2 = \{\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w = 0\}$;
   (4) (d) постоянна на торе $\{|z| = |w| = 1\}$.

Доказать, что в каждом из этих случаев f постоянна.
7. Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{C}^2$ и линейна на каждой комплексной прямой. Доказать, что f — линейная функция.
8. Дана область $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : (|z| - 1)^2 + |w|^2 < r^2\}$. Написать уравнение касательной и уравнение комплексной касательной плоскостей к границе этой области. Найти форму Леви и проверить, что при $0 < r < 1$ граница выпукла по Леви в каждой точке.
9. (a) Пусть K полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^2$ и p — точка вне компакта. Доказать, что $K \cup \{p\}$ полиномиально выпукло.
(b) Пусть $B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 \leq 1\}$ — шар, l — комплексная прямая, проходящая через начало. Доказать, что множество $B \cup l$ полиномиально выпукло.
10. Пусть $\Gamma_1 = \{\operatorname{Im} w = |z|^2\}$ и $\Gamma_2 = \{\Re w = (\Re z)^2\}$. Доказать, что Γ_1 и Γ_2 биголоморфно эквивалентны посредством полиномиального автоморфизма $\mathbb{C}^2$.