Вычислимые функции и машины Тьюринга

Доказать, что не существует алгоритма, который по машине Тьюринга и входу определяет, остановится ли она на этом входе.

Доказать, что не существует алгоритма, который выписывает одну за другой все машины Тьюринга, которые не останавливаются, будучи запущенными на пустой ленте.

Пусть $T(n)$ — максимальное время, которое может пройти до остановки машины Тьюринга с n состояниями и n символами алфавита, если её запустить на пустой ленте. Доказать, что функция $T(n)$ растёт быстрее любой вычислимой всюду определённой функции $b(n)$, то есть $\lim[T(n)/b(n)] = +\infty$.

Доказать, что двухленточную машину Тьюринга, работающую за время $T(n) \geq n$ на входах длины n, можно моделировать на одноленточной машине за время $O(T^2(n))$.

Пусть M — одноленточная машина Тьюринга, которая копирует входное слово (приписывая его копию справа от самого слова). Пусть $T(n)$ — максимальное время её работы на словах длиной n. Доказать, что $T(n) \geq \varepsilon n^2$ для некоторого ε и для всех n. Что можно сказать про $T'(n)$, которое есть минимальное время её работы на словах длины n?

Доказать, что трёхленточную машину Тьюринга, работающую за время $T(n) \geq n$ на входах длины n, можно моделировать на двухленточной за время $O(T(n) \log T(n))$.

Программа может использовать только 100 натуральных переменных, разрешённые операции — прибавление и вычитание 1, разрешённая проверка — не равна ли переменная нулю. Разрешено использовать if–then–else и while, но рекурсия не разрешена. Доказать, что с помощью такой программы можно вычислять любую вычислимую функцию.

Булевы схемы и базисы

Построить алгоритм, определяющий, является ли данный набор булевых функций базисом (т.е. можно ли любую булеву функцию представить в виде схемы, элементами которой являются данные функции).

Пусть C_n есть максимум сложности $C(f)$ по всем булевым функциям f от n переменных. Получить (экспоненциальные) нижние и верхние оценки для C_n.

Глубиной схемы называется максимальное число элементов на пути от входов к выходу. Показать, что любую функцию можно задать схемой глубины не более 3. если разрешать элементы NOT и элементы AND и OR с произвольным числом входов.

Построить схему сложения двух n-битовых чисел размера $O(n)$ (мы рассматривали лишь функции, значениями которых является один бит — поэтому можно интересоваться лишь старшим битом суммы)

Тот же вопрос, если глубина этой схемы должна быть $O(\log n)$.

Тот же вопрос для сравнения двух n-битовых чисел.

Показать, что размер схемы глубины 3 (с элементами NOT, AND и OR, причём два последних типа могут иметь любое число входов), реализующей сложение n битов по модулю 2 (функция PARITY). не меньше c^n (для некоторого $c > 1$).

Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность булевых функций от $1, 2, \ldots$ аргументов. Показать, что следующие два свойства равносильны: (а) существует последовательность формул, вычисляющих эти функции, размер которых не превосходит полинома от n; (б) существует последовательность схем из элементов NOT, AND и OR (с двумя входами), вычисляющих эти функции, глубина которых есть $O(\log n)$.

Классы P и NP

Доказать, что существует разрешимый предикат, который принадлежит non-uniform P, но не принадлежит P.

Доказать, что задача о 2-КНФ (выполнимость конъюнкции дизъюнкций, каждая из которых содержит два члена, каждый из членов является либо переменной, либо её отрицанием) принадлежит P.

Доказать, что задача об эйлероволм пути на неориентированном графе (путь, проходящий по разу по всем рёбрам) принадлежит P.

Предположим, что класс NP совпадает с P. Доказать, что в этом случае за полиномиальное время можно не только проверить выполнимость формулы, но и найти значения переменных. при которых она истинна (аналогично для гамильтонова цикла и т.п.)

Доказать, что задача о паросочетаниях (есть n мальчиков и n девочек, известно, какие пары согласны друг с другом танцевать, надло определить, можно ли устроить танец, в котором все n мальчиков и n девочек соединены в пары) принадлежит NP и, более того, принадлежит P.

Показать, что следующая задача является NP-полной: дан набор из не более чем n типов квадратиков, на сторонах которых написаны какие-то буквы, известно, какие буквы могут соседствовать с какими. Выяснить, можно ли сложить из квадратиков указанного типа большой квадрат размером $n \times n$ корректно (так, чтобы на примыкающих сторонах квадратиков были допустимые пары букв).

Доказать, что множество двоичных записей составных чисел принадлежит NP.

Доказать, что множество двоичных записей простых чисел принадлежит NP.