Введение

Традиционно считается, что дифференциальная геометрия изучает гладкие многообразия в присутствии дополнительных структур — тензорных полей, римановых метрик, расслоений, связностей, и т.п., что она является универсальным языком, при помощи которого исследование взаимодействия этих структур сводится к алгебраическим манипуляциям над функциями и их производными. Признавая справедливость такого мнения, отметим, что в современной математике все сильнее ощущается как раз обратное влияние геометрии на алгебру. Принципиальное значение геометрии состоит в ее использовании как наглядной модели, мотивировки при манипулировании абстрактными дифференциальными алгебраическими объектами. Поясним это на примере понятия касательного вектора $\xi \in T_xM^n$. Имеется три эквивалентные его определения:

1) набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, привязанных к определенной системе координат и меняющихся при заменах по известным правилам;

2) класс касающихся кривых, выходящих из точки x;

3) дифференцирование, т.е. линейное отображение $\xi\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g)$.

Первое есть бюрократическая подмена существа дела инструкцией. Вообще, столь популярные в классической физике и механике неинвариантные определения типа "набор функций $T^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_q}$, причем(?!) при замене координат они преобразуются…" способны полностью скрыть геометрическую природу явления. Они приводит только к путанице и громоздким обозначениям, совершенствование которых помогает лишь в ограниченных пределах. Конечно, без координатных представлений полностью обойтись нельзя, однако координаты должны играть только вспомогательную роль в конкретных вычислениях.

Второе определение уже инвариантно, однако оно слишком ограниченно геометрическими рамками и плохо приспособлено для нужд алгебры. Например, неясно, как складывать вектора. Определение такого типа необходимо для создания в мышлении прочного геометрического образа, связанного с понятием вектора. В этом смысле определение вектора как "стрелочки", выходящей из точки x, ничуть не уступает.

Наконец, последнее определение хотя наименее наглядно, концептуально является наиболее правильным. Оно легко приспосабливается к кольцам и модулям, очень далеким от колец гладких функций. Последовательное использование геометрических образов в современной алгебре (например, при исследовании диофантовых уравнений) является одним из наиболее продуктивных методов.

Целью настоящего курса служит не только ознакомление с основными понятиями дифференциальной геометрии, но и обучение владению каждым из трех языков — инвариантно-алгебраическим, интуитивно-геометрическим и координатно-бюрократическим. В идеале все результаты (и доказательства!) дифференциальной геометрии могут быть переформулированы на каждом из этих языков. Предполагается знакомство слушателей с основами математического анализа на многообразиях, включая алгебру дифференциальных форм и формулу Стокса.

Лекция 1. Кривые на плоскости и в пространстве

Интуитивное представление о форме гладкой кривой $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ связано с ее характеристиками, инвариантными относительно движений пространства $\mathbb{R}^n$, наделенного стандартной евклидовой структурой, $|x|^2 = \sum x_i^2$. *Длина* дуги $r(t)$, $a < t < b$, определяется формулой

$$l(a,b) = \int_a^b |r'|\,dt = \int_a^b (\sum x_i'^2)^{1/2}\,dt\,.$$

Элемент длины $dl = |r'|\,dt$ не зависит от параметризации кривой. Это "почти" 1-форма. Чтобы получить "настоящую" 1-форму, нужно зафиксировать ориентацию кривой и менять знак у dl, если параметризация не согласована с ориентацией. В качестве параметра кривой в точке $r(b)$ можно взять величину $l(a,b)$. Такая параметризация называется *натуральной*. Если τ — натуральный параметр, то $dl = d\tau$, $|\dot r| = 1$ (точкой обозначается производная по натуральному параметру). Дифференцируя, получаем $(\dot r, \ddot r) = 0$, т.е. $\dot r \perp \ddot r$. Скорость вращения касательной $k = |\ddot r|$ называется *кривизной*, $R = k^{-1}$ — *радиус кривизны*.

Задача 1. Вычислите радиус кривизны окружности радиуса R.

Задача 2. Найдите выражение для кривизны в произвольной параметризации.

Центр касающейся окружности радиуса кривизны плоской кривой называется *центром кривизны*. Множество центров кривизны образует *эволюту*. В геометрической оптике оно называется также *каустикой* или *фокальным множеством*.

Задача 3. Найдите точки экстремума кривизны а) параболы; б) эллипса. Определите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 4. Рассмотрим на плоской кривой функцию $f(t) = |r(t) - q|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что

а) q лежит на нормали к кривой $\Leftrightarrow$ $f'(t) = 0$ (т.е. окружность с центром в q, проходящая через $r(t)$, касается кривой);

б) q является центром кривизны $\Leftrightarrow$ $f' = f'' = 0$ (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);

в) r(t) к тому же является точкой экстремума кривизны $\Leftrightarrow$ $f' = f'' = f''' = 0$ (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания).

Задача 5. Нарисуйте эволюту а) параболы; б) эллипса.

Задача 6. Покажите, что

а) особенности эволюты соответствуют точкам экстремума кривизны.

б) в гладких точках эволюта касается нормалей кривой. Таким образом, эволюта — огибающая семейства нормалей.

Примером глобального результата по геометрии плоских кривых является классическая теорема о четырех вершинах.

Теорема. *Выпуклая плоская кривая имеет не менее четырех точек экстремума кривизны.*

Доказательство. Докажем, что функция $R' = -k'/k^2$ на кривой r имеет более двух точек перемены знака, а значит, не менее четырех (поскольку четно).

Пусть $\varphi(t)$ — угол наклона внутренней нормали $n = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Тогда $n' = -Rr'$ (почему?) и

$$(r + Rn)' = r' + R'n + Rn' = R'n = (R'\cos\varphi, R'\sin\varphi)\ ,$$

поэтому на кривой 1-формы $R'\,dt = dR$, $\cos\varphi R'\,dt = dX$, $\sin\varphi R'\,dt = dY$ точны, где X, Y — координаты центра кривизны $r + Rn$, то есть

$$\int(\alpha + \beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)R'\,dt = 0 \qquad \text{для любых } \alpha, \beta, \gamma\ .$$

Предположим, что R' имеет не более двух точек перемен знака (значит, ровно две). Пусть углы наклона нормалей в них равны φ_1, φ_2. Подберем α, β, γ так, чтобы $\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\sin\varphi$ обращалось в ноль ровно при этих значениях φ. Тогда $(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\sin\varphi)R'$ — знакопостоянная функция, и $\int(\alpha+\beta\cos\varphi+\gamma\sin\varphi)R'\,dt \neq 0$. Противоречие. □

Точка на кривой $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ называется *неуплощающейся*, если в ней вектора $r', r'', \ldots, r^{(n)}$ линейно независимы. Для общей кривой почти все точки неуплощающиеся, а точки уплощения расположены дискретно. В неуплощающихся точках определен *сопровождающий флаг*, состоящий из *соприкасающихся плоскостей*. i-я соприкасающаяся плоскость порождена векторами $r', r'', \ldots, r^{(i)}$.

Задача 7. Проверьте, что понятия уплощения и соприкасающихся плоскостей не зависят от параметризации. Почему они так называются?

Семейство ортонормированных *реперов Френе* $\{e_i\}$ получается ортогонализацией реперов $r', r'', \ldots, r^{(n)}$. Первые i векторов репера Френе порождают соприкасающуюся k-плоскость. Разложим производные векторов e_i вновь по тому же базису, $e_i' = \sum a_{ij}e_j$. Наддиагональные ненулевые элементы матрицы $\{a_{ij}\}$ расположены только на диагонали, соседней с главной (поскольку e_i' лежит в $(i{+}1)$-й соприкасающейся плоскости). С другой стороны, эта матрица кососимметрическая, как производная ортогональной. Отсюда вытекают следующие *формулы Френе*:

$$e_i' = -k_{i-1}e_{i-1} + k_ie_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (k_0 = k_{n+1} = 0,\ e_0 = e_{n+1} = 0).$$

Функции k_i, вычисленные в натуральной параметризации, называются *высшими кривизнами*. При $n = 3$ имеем

$$\dot e_1 = ke_2, \quad \dot e_2 = -ke_1 + \varkappa e_3, \quad \dot e_3 = -\varkappa e_2.$$

Эти формулы показывают, что соприкасающаяся 2-плоскость кривой (имеющая нормаль e_3) в первом приближении вращается вокруг касательной прямой, с угловой скоростью $k_2 = \varkappa$, называемой *кручением*.

Из теоремы единственности обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что произвольный набор функций $k_1(\tau), \ldots, k_n(\tau)$, $k_1(\tau) > 0$, $k_i(t) \neq 0$, задают кривую, кривизнами которой они являются, однозначно с точностью до движения (задаваемого начальным положением репера Френе). Иными словами, высшие кривизны образуют *полную систему инвариантов*.

Задача 8. Найдите кривизну и кручение кривых
а) $(a\cos t, a\sin t, bt)$;
б) $e^t(\cos t, \sin t, 1)$;
в) $(t^3 + t, t^3 - t, \sqrt{3}t^2)$;
г) $3x^2 + 15y^2 = 1$, $z = xy$.

Задача 9. Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением.

Задача 10. Для каких кривых $k \equiv 0$? $\varkappa \equiv 0$?

Лекция 2. Поверхности

Риманова структура на многообразии M — семейство положительно определенных квадратичных форм в его касательных пространствах, гладко зависящих от точки многообразия. Подмногообразия римановых многообразий наследуют риманову структуру. Простейший содержательный пример — поверхности в $\mathbb{R}^3$, где риманова структура в $\mathbb{R}^3$ — стандартная евклидова. Наследуемая риманова структура на поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ называется также ее *первой квадратичной формой.* В координатах $(u^1, u^2) \mapsto r(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^3$ квадрат длины вектора $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ равен $(r_*\xi, r_*\xi) = g_{ij}\xi^i\xi^j$, где $g_{ij} = (\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j})$ (знак суммирования по повторяющимся индексам опущен). В этих координатах риманову структуру удобно обозначать в виде $g_{ij}du^i du^j$. В таком виде не нужно запоминать правила перехода к новым координатам. Достаточно подставить в дифференциалы du^i их выражение в новых координатах:

$$g_{kl}(u)du^k du^l = g_{kl}(u(v))\frac{\partial u^k}{\partial v^i}dv^i\frac{\partial u^l}{\partial v^j}dv^j = g'_{ij}(v)dv^i dv^j \ , \quad \text{т.е. } g'_{ij}(v) = g_{kl}(u(v))\frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^l}{\partial v^j} \ .$$

После того, как первая квадратичная форма (риманова структура) на поверхности определена, можно забыть о ее вложении в $\mathbb{R}^3$. Свойства поверхности, описываемые посредством первой квадратичной формы, относят к *внутренней геометрии поверхности.* Интуитивно ясно, например, что при изгибании листка бумаги его метрические свойства не меняются. К внутренней геометрии относится измерение длин, углов, площадей. Элемент площади $d\sigma$ определяется условием, что площадь касательного квадрата с ортогональными единичными сторонами равна 1. Поскольку определитель ортогонального преобразования из $O(2)$ равен ± 1, это определение инвариантно, с точностью до знака. В координатах $d\sigma = \pm\sqrt{|g|}\, du^1 \wedge du^2$, где $|g| = \det ||g_{ij}||$. Знак фиксируется выбором *ориентации* поверхности. Итак, длина кривой и площадь области вычисляются по формулам

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i\dot{u}^j}\, dt \ , \qquad S = \int_D \sqrt{|g|}\, du^1 \wedge du^2 \ .$$

К внешней геометрии поверхности относят ее *вторую квадратичную форму* h, измеряющую квадратичное отклонение поверхности от своей касательной плоскости. Зафиксируем вектор единичной нормали m_0 в точке $r(u_0) \in M$ и положим $h(u_0) = d^2(r(u), m_0)$, второй дифференциал проекции $(r(u), m_0)$, рассматриваемой как функция на M. Если выбрать *евклидовы* координаты $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy была касательной к M в точке O, то в таких координатах поверхность является графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда x, y являются локальными координатами на M и в рассматриваемой точке $h = f_{xx}\, dx^2 + 2f_{xy}\, dx\, dy + f_{yy}\, dy^2$.

Итак, на векторном пространстве $T_{u_0}M$ имеется евклидова структура g, и квадратичная форма h. Из линейной алгебры известно, что собственные числа квадратичной формы вещественны, а собственные направления — ортогональны. Собственные числа k_1, k_2 называются *главными кривизнами*, а собственные направления — *главными направлениями.* При этом $K = k_1 k_2$ — *гауссова кривизна,*

$\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ — *средняя кривизна.* В координатах речь идет о собственных числах, определителе и следе матрицы $||h_{ij}||\,||g_{ij}||^{-1}$, откуда, в частности,

$$K = \det ||h_{ij}|| / \det ||g_{ij}|| \ .$$

В отличие от средней кривизны, *гауссова кривизна определяется внутренней геометрией поверхности и выражается через первую квадратичную форму.* Это будет показано позже.

Задача 1. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

а) определите первую квадратичную форму. Перепишите ее в сферических координатах; в декартовых координатах на плоскости Oxy при стереографической проекции из точки $(0, 0, 1)$; в полярных координатах на той же плоскости;

б) найдите длину окружности и площадь круга радиуса ρ;

в) определите вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны.

Задача 2. (Формула Эйлера.) В окрестности точки $p \in M$ рассмотрим кривую, высекаемую на поверхности M плоскостью λ, проходящую через ту же точку. Предположим, что ее касательная $l = \lambda \cap T_pM$ образует угол α с одним из главных направлений. Определите кривизну кривой в точке p, если

а) λ проходит через нормаль;

б) λ образует угол β с нормалью.

Задача 3. *Линейчатой поверхность* M образована объединением однопараметрического семейства прямых $r(u, v) = a(u) + vb(u)$, где вектора $\frac{da}{du}, b$ трансверсальны при всех u. Найдите первую и вторую квадратичные формы M в точках кривой a. Докажите, что поверхность *разворачивается* (т.е. риманова структура евклидова, приводится заменой координат к виду $(du^1)^2 + (du^2)^2$) тогда и только тогда когда ее гауссова кривизна равна нулю, то есть вторая квадратичная форма вырождена.

Поверхность *эллиптическая* (локально выпуклая), если $K > 0$ (главные кривизны имеют один знак), и *гиперболическая*, если $K < 0$. На поверхности общего положения области эллиптичности и гиперболичности разделены *параболической линией*, где одна из кривизн обращается в ноль. На поверхности имеется поле крестиков главных направлений (ортогональных в смысле евклидовой структуры в объемлющем $\mathbb{R}^3$!). Это поле имеет особенности в точках, где $k_1 = k_2$. Такие точки называются *омбилическими.* Точки на нормали на расстоянии k_1^{-1}, k_2^{-1} от поверхности называются *фокальными.* Поверхность фокальных точек называется также *каустикой.*

Задача 4. Докажите, что $r(u_0) \in M$ — критическая точка функции квадрата расстояния $|r - q|^2$: $M \to \mathbb{R}$ до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^3$ пространства тогда и только тогда, когда q лежит на нормали к M в точке $r(u_0)$. При этом критическая точка — вырожденная (то есть гессиан функции вырожден) тогда и тогда, когда точка — фокальная.

Задача 5. а) Нарисуйте поле крестиков главных направлений в окрестности начала координат на поверхности $z = x^2 + y^2 + x^3 + axy^2$ при различных значениях параметра a. Сколько оборотов делает поле крестиков при обходе вокруг омбилической точки?

б) Нарисуйте каустику этой поверхности в окрестности фокальной точки, соответствующей началу координат (тоже для различных a).

Согласно *теореме о ежике* сумма индексов особых точек векторного поля на сфере равна ее эйлеровой характеристике, то есть двум. По предыдущей задаче индекс поля крестиков в омбилической точке равен $\pm 1/2$. Поэтому (хоть поле крестиков и не векторное поле) *на замкнутой выпуклой поверхности общего положения всегда имеется не менее четырех омбилических точек.* Число 4 в этом утверждении и в теореме о 4 вершинах плоской кривой имеет, по видимому, различную природу.

Задача 6. Сколько омбилических точек на эллипсоиде с различными полуосями?

Задача 7. Нарисуйте фокальное множество эллипсоида.

Гауссово отображение $G\colon M \to S^2$ сопоставляет точке x поверхности вектор единичной нормали n_x, перенесенный в начало координат.

Задача 8. Докажите, что $K\,d\sigma = G^* d\Sigma$, где 2-формы $d\sigma$ и $d\Sigma$ — элементы площади на M и единичной сфере S^2 соответственно.

Если M — сфера с g ручками, то интегрируя равенство предыдущей задачи, мы получаем знаменитую *формулу Гаусса-Бонне*

$$\int_M K\,d\sigma = 2\pi\chi(M)\ ,$$

где $\chi(M) = 2 - 2g$ — эйлерова характеристика поверхности M.

Задача 9. (Для знакомых с понятиями степени и эйлеровой характеристики.) Докажите, равенство $\chi(M) = n\chi(S^2) = 2n$, где n — степень гауссова отображения, а вместе с ним и приведенную выше формулу.

Лекция 3. Параллельный перенос (геометрическое введение).

В курсе анализа неоднократно упоминался тезис о том, что касательные пространства T_xM, T_yM в различных точках, хотя и изоморфны, не имеют естественного изоморфизма. Оказывается, на *римановом* многообразии каждому гладкому пути γ на M из x в y можно сопоставить такой изоморфизм, называемый *параллельным переносом* вдоль пути γ. Например, для евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ параллельный перенос не зависит от пути и совпадает с обычным параллельным переносом. Этот факт остается справедливым, если плоскость изгибать в $\mathbb{R}^3$, не меняя ее метрики, например, свернуть в кулек. Для локально евклидовой римановой структуры результат параллельного переноса зависит лишь от гомотопического класса пути, в общем случае обнос даже по маленькой петле нетривиален.

Задача 1. На какой угол поворачивается касательная плоскость к конусу при обходе вдоль образующей, если его направляющие образуют угол α с осью?

Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — кривая на ней, и $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}M$ — гладкое поле касательных векторов к M вдоль γ. Поле производных (покомпонентных) $\frac{d\xi}{dt}$ вдоль кривой не обязано касаться M. Пусть $p_M\colon T_x\mathbb{R}^3 \to T_xM$ — ортогональная проекция на касательную плоскость к M. Тогда $\nabla_t\xi = p_M(\frac{d\xi}{dt})$ — касательное поле, называемое *ковариантной производной* поля ξ вдоль γ. Поле ξ называется *параллельным* вдоль γ, если $\nabla_t \xi \equiv 0$. Условие параллельности является обыкновенным дифференциальным уравнением на компоненты поля ξ, что задает поле по его значению в начальной точке и определяет, таким образом, параллельный перенос.

Геометрически параллельный перенос можно представлять следующим образом. Возьмем кусок фанеры и «прокатим» его по M вдоль кривой γ, отмечая на фанере точки касания. Полученная плоская кривая $\widetilde{\gamma}$ называется *разверткой* исходной кривой γ. Можно показать, что на развертке параллельный перенос соответствует обычному параллельному переносу векторов на плоскости.

Задача 2. На какой угол поворачивается касательная плоскость к сфере при обходе вдоль параллели с широтой α?

Тот факт, что *параллельный перенос определяется лишь внутренней геометрией поверхности*, нетривиален. Покажем, что в локальной карте (u^1, u^2) на M для вычисления ковариантной производной ∇_t достаточно знать лишь коэффициенты римановой метрики g_{ij} и их производные. Действительно, поле $\xi(t) = \xi^1(t)\frac{\partial}{\partial u^1} + \xi^2(t)\frac{\partial}{\partial u^2}$, имеет в $\mathbb{R}^3$ координаты $\xi^1 r_1 + \xi^2 r_2$, где $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$. Поэтому

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}^1 r_1 + \dot{\xi}^2 r_2 + \xi^1 \dot{r}_1 + \xi^2 \dot{r}_2 \ .$$

Мы хотим найти проекцию этого выражения на T_xM. Первые два слагаемых уже касаются M и вычисляются не выходя из локальной карты. Поэтому нам достаточно показать, что коэффициенты разложения по базису r_i ортогональной проекции векторов $\dot{r}_i$ на T_xM выражаются через g_{ij}. Для этого заметим, что эти координаты однозначно восстанавливаются, если известны попарные скалярные произведения $(\dot{r}_i, r_j)$. Но, например, $\dot{g}_{11} = \frac{d}{dt}(r_1, r_1) = 2(\dot{r}_1, r_1)$, откуда $(\dot{r}_1, r_1) = \frac{1}{2}\dot{g}_{11}$ и т.п. Из этих вычислений нетрудно вывести явные формулы для ковариантной производной, однако это будет сделано позже в несколько иных обозначениях. $\square$

Еще один способ вычисления параллельного переноса состоит в использовании гауссова отображения $G \colon M \to S^2$, которое позволяет свести задачу к случаю сферы. Касательные плоскости T_xM и $T_{G(x)}S^2$ параллельны, что позволяет их отождествить посредством обычного параллельного переноса. (Построенный изоморфизм $G_{||} \colon T_xM \to T_{G(x)}S^2$ не есть производное отображение G_*! Например, если M — плоскость, то $G(M)$ состоит из одной точки и $G_* = 0$.) Поскольку координатное выражение полей ξ и $G_{||}\xi$ одинаковы, то же справедливо для их ковариантных производных. Поэтому *поле ξ на M вдоль кривой $\gamma \subset M$ параллельно тогда и только тогда, когда поле $G_{||}\xi$ на сфере S^2 параллельно вдоль кривой $G(\gamma) \subset S^2$.*

Рассмотрим для примера многоугольник D на сфере, стороны которого — дуги большого радиуса. Из рисунка видно, что угол, на который поворачивается касательная плоскость при обходе вдоль его границы, равен $\varphi(\partial D) = 2\pi - \sum \alpha_i$. Продолжим стороны D, как на рисунке. Тогда сфера представится как объединение многоугольника D, антиподального к нему D' и n двуугольников с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поэтому $4\pi =$ (площадь сферы) $= 2$ (площадь D) $+ 2\sum \alpha_i$. Отсюда

$$\varphi(\partial D) = \int\limits_D K \, d\sigma \ ,$$

поскольку на единичной сфере $K = 1$. Последняя формула справедлива для области D на любой ориентированной поверхности M, поскольку при гауссовом отображении $K\,d\sigma = d\Sigma$, где $d\sigma$ и $d\Sigma$ — элементы площади на поверхности и сфере соответственно.

Полученную формулу можно уточнить, введя понятие геодезической кривизны. Пусть $\gamma \subset M$ — кривая на поверхности, τ — натуральный параметр, $e(\tau)$ и $n(\tau)$ — касательный и нормальный единичные вектора. Продифференцируем $e(\tau)$ и ортогонально спроектируем на $T_{\gamma(\tau)}M$. Получим вектор $\nabla_\tau e = k_g n$. Величина $k_g = (\dot{e}, n)$ называется *геодезической кривизной* кривой γ. Она совпадает с обычной кривизной развертки $\widetilde{\gamma}$, то есть угловой скоростью вращения касательной прямой (с единственным отличием: величина k_g имеет знак, показывающий направление вращения касательной). Отсюда следует, что если граница ∂D диска D гладкая, то угол поворота касательной плоскости при обходе вдоль нее равен $\varphi(\partial D) = 2\pi - \int_{\partial D} k_g\, dl$. Если же ∂D имеет изломы, при которых касательный вектор поворачивается на угол α_i, то $\varphi(\partial D) = 2\pi - \int_{\partial D} k_g\, dl - \sum \alpha_i$. Отсюда вытекает локальный аналог формулы Гаусса-Бонне:

$$\int\limits_D K\, d\sigma + \int\limits_{\partial D} k_g\, dl + \sum \alpha_i = 2\pi\ .$$

Инфинитезимальный вариант формул Гаусса-Бонне таков: *при обходе вдоль бесконечно-малой петли в точке $x \in M$ касательная плоскость поворачивается на угол, равный площади куска поверхности, ограниченного петлей, умноженной на $K(x)$*. Как следствие получаем следующую важную теорему.

Теорема. *Гауссова кривизна полностью определяется внутренней геометрией поверхности.*

Лекция 4. Связность в S^1-расслоении.

Формулы, формализующие рассуждения предыдущей лекции, довольно громоздки. Для начала опишем их проявление в более простой ситуации S^1-расслоений. Рассмотрим 3-мерное многообразие W касательных векторов *единичной длины* к поверхности M и его естественную проекцию $\pi\colon W \to M$, $T_xM \ni \xi \mapsto x$. Слои этой проекции $\pi^{-1}(x) \subset T_xM$ диффеоморфны окружности S^1 и состоят из единичных векторов, приложенных к точке x. Это — типичный пример S^1-расслоения, о котором речь ниже.

Определение. *Гладким расслоением* многообразия W над базой M со слоем F называется гладкое отображение $\pi\colon W \to M$ такое, что у каждой точки базы M существует окрестность U и диффеоморфизм $\psi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, при котором слои $\pi^{-1}(x)$ диффеоморфно переходят в слои $\{x\} \times F$.

Задача 1. Докажите, что лента Мёбиуса нетривиально расслоена над окружностью со слоем отрезок. (Тривиальное — это расслоение вида $M \times F \to M$, где отображение — проекция на первый множитель.)

Диффеоморфизм ψ_U называется *тривиализацией* над U расслоения π. Тривиализаций бывает много, например, разные тривиализации возникают над пересечениями окрестностей U. Если φ_U — другая тривиализация, то переход к ней $\varphi\psi^{-1}\colon U \times F \to U \times F$, $(x, y) \mapsto (x, g_x(y))$ задается семейством диффеоморфизмов $g_x\colon F \to F$, $x \in U$, называемых *функциями перехода*. Расслоения можно задавать, покрыв базу окрестностями U_α и указав явно функции перехода $g_x^{\alpha\beta}\colon F \to F$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ на пересечении окрестностей.

Часто бывает, что слои расслоения несут какую-нибудь структуру. Тогда требуется, чтобы функции перехода сохраняли эту структуру. В частности, рассмотрим окружность $S^1 = SO(2) = U(1)$ как группу, в которой точка $\varphi \in S^1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ отождествляется с поворотом на угол φ.

Определение. Расслоение называется *S^1-расслоением*, если его слои диффеоморфны окружности $F \simeq S^1$, а все функции перехода являются поворотами окружности.

На слоях S^1-расслоения имеется естественный угловой параметр, определенный с точностью до начала отсчета. Кроме того, на пространстве S^1-расслоения имеется действие группы S^1, при котором точке $\varphi \in S^1$ сопоставляется одновременный поворот всех слоев на угол φ. По существу, S^1- расслоение можно определить как многообразие W со свободным действием на нем группы S^1 (действие называется свободным, если при всех $\varphi \neq 0$ поворот W на угол φ не имеет неподвижных точек).

Сечение s расслоения сопоставляет точке x на многообразии точку $s(x) \in \pi^{-1}(x)$ в слое. Формально, сечение — это гладкое отображение $s\colon M \to W$, такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$. При выбранной тривиализации $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ сечение $s\colon x \mapsto (x, \widetilde{s}(x))$ задается отображением базы в слой $\widetilde{s}\colon U \to F$. Для S^1-расслоений выбор сечения s над областью $U \subset M$ равносилен фиксированию тривиализации расслоения над U. В этой тривиализации сечение имеет вид $\widetilde{s}(x) \equiv 0 \in F = S^1$. Для общих топологических расслоений это уже не так: существование глобального сечения является необходимым, но не достаточным условием тривиальности расслоения.

Основное определение лекции. (Топологической) *связностью* на расслоении называется поле касательных n-мерных подпространств $C(y) \subset T_yW$ на пространстве W расслоения, $n = \dim M$, которые трансверсальны слоям в каждой точке.

По определению, касательное пространство T_yW в каждой точке пространства расслоения разлагается в прямую сумму касательного пространства к слою («вертикального») и пространства $C(y)$ («горизонтального»). Ограничение проекции $\pi_*\colon T_yW \to T_{\pi(y)}M$ на первое слагаемое тривиально, а на второе $C(y)$ является изоморфизмом. Поэтому каждый касательный вектор на базе $\xi \in T_xM$ однозначно поднимается до поля векторов вдоль слоя $\hat{\xi}(y) \in C(y) \subset T_yW$, $\pi(y) = x$, таких, что $\pi_*\hat{\xi}(y) = \xi$. Таким образом, связность «связывает» соседние слои, она показывает, в каком направлении точка должна двигаться в пространстве расслоения, когда проекция этой точки перемещается по базе.

Сечение s над кривой $\gamma_t \subset M$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *ковариантно постоянным* вдоль γ, если оно (точнее, его образ) касается плоскостей связности в каждой точке. Значение сечения в начальной точке кривой однозначно продолжается до ковариантно постоянного сечения над γ. Ковариантно постоянное продолжение задает диффеоморфизм слоев $\pi^{-1}(\gamma_a) \to \pi^{-1}(\gamma_b)$, называемый *параллельным переносом.*

В дальнейшем мы предполагаем, что π является S^1-расслоением, а поле плоскостей связности *инвариантно* относительно действия S^1. В этом случае плоскости $C(y)$ являются гиперплоскостями, и связность можно задать с помощью 1-формы η на W, для которой $C(y)$ является ее нуль-пространством. Форма η определена с точностью до множителя, который удобно нормировать условием $\eta(\frac{\partial}{\partial\varphi}) = 1$ (где $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ — поле касательных единичных векторов к слоям расслоения π).

При выбранной тривиализации над $U \subset M$ форма η имеет вид $\eta = d\varphi + \theta$, где θ — 1-форма на базе M, то есть θ не зависит от φ (правильнее было бы писать

$\eta = d\varphi + \pi^*\theta)$. При смене тривиализации $\varphi \rightsquigarrow \varphi' = \varphi + g(x)$, $x \in U$, имеем $\eta' = \eta = d\varphi' - dg + \theta$, то есть θ заменяется на $\theta' = \theta - dg$.

С помощью формы связности η *условие ковариантной постоянности* сечения $s = \varphi(t)$ вдоль кривой $\gamma(t)$ можно записать в виде $s^*\eta(\dot\gamma) = 0$ или $\boxed{\frac{d\varphi}{dt} + \theta(\dot\gamma) = 0}$. Рассмотрим двумерный диск D на базе и тривиализацию над ним. Тогда при обходе вдоль ∂D слой поворачивается на угол

$$\varphi(\partial D) = \int_{\partial D} d\varphi = -\int_{\partial D} \theta\ .$$

Определение. 2-форма $\omega = d\theta$ называется *формой кривизны* связности $\eta = d\varphi + \theta$.

Это определение не зависит от тривиализации, поскольку при ее замене форма θ меняется на замкнутую. Более инвариантно можно сказать, что форма $d\eta$ может быть поднята с базы и ω определяется условием $\pi^*\omega = d\eta$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\varphi(\partial D) = -\int_{\partial D} \theta = -\int_{D} \omega\ .$$

В приведенных рассуждениях нигде не использовалось, что база расслоения двумерна, она может иметь произвольную размерность. Таким образом, геометрический смысл формы кривизны состоит в том, что ее значение на паре касательных векторов $\omega(\xi_1, \xi_2)$ измеряет поворот слоя при обходе вдоль маленькой петли в плоскости этих векторов.

Связность существует на любом расслоении. Для ее построения достаточно взять произвольные связности $\eta_\alpha = d\varphi + \theta_\alpha$ на различных тривиализациях расслоения π (например, можно взять *плоские связности* $\theta_\alpha \equiv 0$), а затем склеить их при помощи разбиения единицы.

Если $\eta_1 = d\varphi + \theta_1$ и $\eta_2 = d\varphi + \theta_2$ — две связности, то их разность $\theta_1 - \theta_2$ является корректно определенной глобальной 1-формой на M (не зависящей от тривиализации). И обратно, если η — связность, то и $\eta + \pi^*\beta$ — связность для произвольной 1-формы $\beta \in \Omega^1(M)$. Таким образом, *пространство связностей в S^1-расслоении над M изоморфно пространству 1-форм на M, однако этот изоморфизм не канонический.* Говорят, что связности образуют аффинное пространство над $\Omega^1(M)$.

Формы кривизны двух связностей η_1 и $\eta_2 = \eta_1 + \pi^*\beta$ связаны соотношением $\omega_2 = \omega_1 + d\beta$. Иными словами, *при изменении связности ее форма кривизны меняется на точную.* Если база M расслоения двумерна, ориентированна и компактна, то из формулы Стокса вытекает, что интеграл

$$e(\pi) = \frac{-1}{2\pi}\int_M \omega$$

не зависит от выбора связности и является, следовательно, топологическим инвариантом расслоения. Этот инвариант $e(\pi)$ называется *числом Эйлера расслоения.* Классические формулы Гаусса-Бонне являются частным случаем приведенных интегральных формул.

Задача 2. Расслоение Хопфа $\pi\colon S^3 \to S^2$ точке $(z_1, z_2) \in S^3$ на единичной сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ с метрикой $||(z_1, z_2)||^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ сопоставляет точку $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ на комплексной проективной прямой.

а) Докажите, что π является S^1-расслоением относительно умножения на элементы окружности $\{e^{i\varphi}\}$ комплексных единиц.

б) Опишите тривиализации расслоения, функции перехода.

в) *Стандартная связность* задается касательными плоскостями на сфере S^3, ортогональными слоям (в смысле евклидовой структуры на $\mathbb{C}^2$). Найдите выражение 1-формы η этой связности в построенных тривиализациях.

г) Вычислите форму кривизны ω стандартной связности.

д) Определите число Эйлера $e(\pi) = \frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}P^1}\omega$ расслоения Хопфа. (Ответ: -1.)

е) Приведите пример S^1-расслоения на сфере с числом Эйлера 1.

В общем случае нет естественного способа для выбора одной из всевозможных связностей. Однако в случае римановых поверхностей такой способ имеется. Пусть M — двумерная поверхность с римановой структурой g. Пусть $\pi\colon W \to M$ — расслоение векторов единичной длины. Выберем тривиализацию на некоторой области $U \subset M$, то есть поле u_1 векторов единичной длины (соответствующих сечению $\varphi \equiv 0$). Пусть u_2 — поле единичных векторов, ортогональных u_1 (соответствующих сечению $\varphi \equiv \pi/2$).

Задача 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$. Параллельный перенос векторов задает связность на расслоении векторов единичной длины к поверхности M. Докажите, что 1-форму $\eta = d\varphi + \theta$ этой связности можно определить, раскладывая по базисным векторам коммутатор полей $[u_1, u_2] = -\theta(u_1)u_1 - \theta(u_2)u_2$.

Определение. Связность $\eta = d\varphi + \theta$, задаваемая соотношением $[u_1, u_2] = -\theta(u_1)u_1 - \theta(u_2)u_2$, называется *римановой связностью.*

Задача 4. Докажите, что определение римановой связности не зависит от тривиализации, а полностью определяется римановой структурой.

Задача 5. Докажите, что форма кривизны римановой связности поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ равна $-K\,d\sigma$, где $d\sigma$ — форма площади

а) для единичной сферы;

б) для произвольной поверхности (используйте отображение Гаусса).

Пример. Найдем гауссову кривизну метрики, имеющей *конформный вид* $g(x,y)(dx^2 + dy^2) = h^2(dx^2 + dy^2)$, $h > 0$.

Репер $u_1 = \frac{1}{h}\partial_x$, $u_2 = \frac{1}{h}\partial_y$ — ортонормированный. Возьмем его в качестве тривиализации. Тогда $[\frac{1}{h}\partial_x, \frac{1}{h}\partial_y] = -\frac{h_x}{h^2}\,\frac{1}{h}\,\partial_y + \frac{h_y}{h^2}\,\frac{1}{h}\,\partial_x$, откуда

$$\theta(u_1) = -\frac{h_y}{h^2}\,, \quad \theta(u_2) = \frac{h_y}{h^2}\,, \quad \text{т.е.} \quad \theta = -\frac{h_y}{h}\,dx + \frac{h_x}{h}\,dy = -\frac{\partial \ln h}{\partial y}\,dx + \frac{\partial \ln h}{\partial x}\,dy\,.$$

Отсюда находим кривизну связности $\eta = d\varphi + \theta$

$$\omega = d\theta = \left(\frac{\partial^2 \ln h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln h}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = \Delta \ln h\, dx \wedge dy = \frac{1}{2g}\Delta \ln g\,(g\,dx \wedge dy)\,.$$

$$K = -\frac{1}{2g}\Delta \ln g\,, \quad \text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,. \qquad \square$$

Задача 6. Найдите кривизну метрики $\frac{4}{(1+k(x^2+y^2))^2}(dx^2 + dy^2)$.

Задача 7. Найдите кривизну метрики $A(x,y)^2dx^2 + B(x,y)^2dy^2$, $A > 0$, $B > 0$.

Топологическое отступление. Классификация S^1-расслоений над двумерными поверхностями основана на следующей простой лемме. Рассмотрим поверхность M — сферу с g ручками и S^1-расслоение $W \to M$ над ней.

Лемма. *Если из поверхности удалить одну точку p, то над оставшейся некомпактной частью $M \setminus \{p\}$ расслоение тривиально, то есть существует непрерывное сечение $s\colon M \setminus \{p\} \to W$.*

(Действительно, поверхность можно получить из диска некоторой склейкой вдоль границы. Построим сперва сечение над линией склейки, а затем продолжим внутрь диска с его границы.)

Рассмотрим диск D с центром в p и тривиализацию над ним. Сечение леммы над диском задается отображением $\widetilde{s}\colon D \setminus \{p\} \to S^1$. При обходе вдоль границы сечение совершает некоторое количество оборотов, которое и называется его числом Эйлера. Из приведенной конструкции видно, что расслоения с равными числами Эйлера изоморфны. С другой стороны, ясно, что существуют расслоения с произвольным числом Эйлера $e \in \mathbb{Z}$: достаточно в тривиальном расслоении удалить один слой, а затем вклеить обратно, «перекрутив» сперва расслоение необходимое число раз. Подытожим.

Теорема. *Число Эйлера устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных S^1-расслоений на M и множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Докажем формулу $\int_M \omega = -2\pi e(\pi)$. Поскольку левая часть не зависит от связности, мы можем ее выбирать сами. Начнем с тривиальной связности η над $M \setminus \{p\}$, в которой сечение s ковариантно постоянно. В тривиализации над диском D эта связность имеет вид $\eta = d\varphi + \theta$, где форма θ задана вне нуля. Изменив θ в окрестности нуля на гладкую во всем диске форму $\widetilde{\theta}$, мы получим связность $\widetilde{\eta}$ на всем M. Форма кривизны ω такой связности равна нулю вне D. Поэтому

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_D \omega = \int\limits_D d\widetilde{\theta} = \int\limits_{\partial D} \widetilde{\theta} = \int\limits_{\partial D} \theta\,.$$

Последний интеграл равен числу оборотов сечения s в тривиализации над D, умноженному на -2π. □

Задача 8. Пусть на S^1-расслоении π задано сечение s, определенное вне конечного числа точек $p_1, \dots, p_k$. Как выше, определим числа вращения сечения s при обходе вокруг точек p_i. Докажите, что $e(\pi)$ равно сумме этих чисел вращения.

Задача 9. Определите число Эйлера расслоения векторов единичной длины на поверхности рода g.

Лекция 5. Векторные расслоения. Тензоры

Цель данной лекции — упорядочить те знания слушателей о тензорах, которые у них наверняка имеются.

Векторным расслоением $\pi\colon E \to M$ называется расслоение, у которого слоем является векторное пространство, а функции перехода — линейными преобразованиями.

Задача 1. Опишите тривиализации и функции перехода на *касательном* $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ и *кокасательном* $\bigcup_{x\in M} T^*_xM$ расслоениях.

Пространство расслоения E — многообразие размерности $n + k$, где $n = \dim M$, $k = \dim E_x$. Обычно (не вполне корректно) под *размерностью* векторного расслоения понимают k, размерность слоя. Слои $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, имеют структуру линейного пространства, что позволяет складывать сечения и умножать на функции на M. Если есть два расслоения $E = \bigcup E_x$ и $E' = \bigcup E'_x$, то можно образовать их *сумму* $E \oplus E' = \bigcup E_x \oplus E'_x$ (опишите тривиализации и функции перехода). Вообще, все естественные операции над векторными пространствами — сумма и тензорное произведение, переход к сопряженному пространству, подпространству, факторпространству, — переносятся на расслоения, и мы получаем понятия суммы и тензорного произведения расслоений, сопряженного расслоения, подрасслоения, фактορрасслоения и т.п.

Напомним, что тензорное произведение $U \otimes V$ векторных пространств U и V — это пространство размерности mn, $m = \dim U$, $n = \dim V$, имеющее три эквивалентных определения:

1) Пространство с базисом $e_i \otimes f_j$, где $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ — базисы в пространствах U и V.

2) Пространство билинейных функций от пары сопряженных элементов $a \in U^*$, $b \in V^*$.

3) Факторпространство необъятного бесконечномерного пространства с базисом, состоящим из символов вида $u \otimes v$, $u \in U$, $v \in V$, по подпространству, порожденному элементами вида $(c_1 u_1 + c_2 u_2) \otimes v - c_1\, u_1 \otimes v - c_2\, u_2 \otimes v$ и $u \otimes (c_1 v_1 + c_2 v_2) - c_1\, u \otimes v_1 - c_2\, u \otimes v_2$.

Именно последнее определение, к которому труднее всего привыкнуть, наиболее инвариантно и переносится на произвольные кольца и модули.

Расслоение $\overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{p \text{ раз}} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}^{q \text{ раз}}$ (сокращенно $T^{\otimes p} M \otimes T^{*\otimes q} M$) размерности n^{p+q} называется *тензорным расслоением* типа (p, q), а его сечения — *тензорами*, или *тензорными полями*.

Примеры. Векторное поле — тензор типа $(1, 0)$, дифференциальная 1-форма — тензор типа $(0, 1)$. Риманова структура и дифференциальные 2-формы — примеры сечений расслоения $T^{*\otimes 2} M$, то есть тензоров типа $(0, 2)$. Отметим, что риманова структура g задает отождествление $T_x M \to T^*_x M \colon \xi \mapsto g_x(\xi, \cdot)$, что позволяет отождествить все пространства тензоров типа (p, q) с равными $p + q$.

Операции *симметрирования* $\mathrm{sym}\colon u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_\sigma u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$ и *альтернирования* $\mathrm{alt}\colon u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_\sigma (-1)^\sigma u_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}$ выделяют у чистого (то есть типа $(p, 0)$ или $(0, q)$) тензора f его *симметрическую* f_{sym} и, соответственно, *кососимметрическую* f_{alt} части. Для симметрических тензоров f типа $(0, p)$ и g типа $(0, q)$ определено их симметрическое произведение

$$f \circ g = \frac{(p+q)!}{p!q!} (f \otimes g)_{\mathrm{sym}} \ .$$

Аналогично, для кососимметрических тензоров определено их внешнее произведение

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} (f \otimes g)_{\mathrm{alt}} \ .$$

Задача 2. Как обозначается пространство кососимметрических тензоров типа $(0, q)$? (Ответ: $\Omega^q(M)$.) Для чего введен множитель в предыдущей формуле?

При $q = 2$ каждый тензор является суммой своих симметрической и кососимметрической частей

$$a \circ b = a \otimes b + b \otimes a \ , \qquad a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a \ , \qquad a \otimes b = \frac{1}{2} a \circ b + \frac{1}{2} a \wedge b \ .$$

При $q > 2$ симметрические и кососимметрические тензоры далеко не исчерпывают всех тензоров.

Выбор локальных координат $(x^1, \dots, x^n)$ на M определяет в пространстве тензоров $T_x^{\otimes p}M \otimes T_x^{*\otimes q}M$ базис $\partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$, где $\partial_{x^i} = \partial/\partial x^i$. Это дает координатный подход к понятиям тензора и операций над ними. Опишем это соответствие.

Тензор $T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$	Набор n^{p+q} функций $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x)$
Его представление в новом базисе $T = \overline{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \partial_{y^{i_1}} \otimes \dots \otimes dy^{j_q}$	Правила замены координат $\overline{T}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}$
Изоморфизм перестановки $T^{\otimes 2}M \to T^{\otimes 2}M \colon u \otimes v \mapsto v \otimes u$	Операция перестановки индексов $T^{ij} \mapsto T^{ji}$
Риманова структура $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$	Симметрическая положительно определенная матрица g_{ij}. Матрица g^{ij} — ей обратная: $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$
Изоморфизм $T_xM \to T_x^*M \colon v \mapsto g_x(v, \cdot)$ и его продолжение на тензоры более высоких рангов	Операции (взаимно обратные) поднятия и опускания индексов $T^{iI}_J \mapsto \overline{T}^{\,I}_{jJ} = g_{ij} T^{iI}_J$ и $T^I_{jJ} \mapsto \overline{T}^{iI}_J = g^{ij} T^I_{jJ}$
След оператора $f \in \operatorname{Hom}(TM, TM) \cong T^*M \otimes TM$, $u \otimes a \mapsto u(a)$	Операция свертки $T^i_j \mapsto T^i_i$
и его обобщение $T^*M \otimes TM \otimes E \to E$: $u \otimes a \otimes w \mapsto u(a)\, w$	$T^{iI}_{jJ} \mapsto \overline{T}^I_J = T^{iI}_{iJ}$

Приведем важные примеры расслоений, не являющихся тензорными. Если $E \to M$ — векторное расслоение, и $f \colon N \to M$ — гладкое отображение, то на N возникает *индуцированное* расслоение $f^*E = \bigcup_{x \in N} E_{f(x)}$. (Строгое определение дайте самостоятельно.)

Касательное расслоение подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^N$ является подрасслоением тривиального N-мерного. Соответствующее факторраслоение называется *нормальным* расслоением многообразия M. Если на $\mathbb{R}^N$ фиксирована евклидова структура, то нормальное расслоение состоит из векторов, ортогональных M.

Задача 3. Дайте определение нормального расслоения подмногообразия $N \subset M$ многообразия M.

Проективное пространство P^n образовано прямыми в $\mathbb{R}^{n+1}$. На P^n имеются *тавтологические* одномерное расслоение τ и n-мерное ν. Слоем τ над точкой $l \in P^n$ является сама прямая l; слоем расслоения ν служит факторпространство $\mathbb{R}^{n+1}/l$. Аналогично определяются тавтологические расслоения на *многообразии Грассмана* $G_{k,n}$ k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства.

Задача 4. Постройте канонический изоморфизм $TG_{k,n} \cong \operatorname{Hom}(\tau, \nu) = \tau^* \otimes \nu$.

Чтобы задать векторное расслоение, нужно определить прежде всего пространство E расслоения. Имеется другой подход, согласно которому расслоение на M — это дополнительная алгебраическая структура на многообразии. Оно полностью определяется $C^\infty(M)$-модулем $\Gamma(E)$ своих сечений, равно как само многообразие определяется кольцом $C^\infty(M)$ функций на нем. Опишем это соответствие.

Многообразие M	Кольцо $C^\infty(M)$
Подмногообразие $N \subset M$	Идеал функций, обращающихся в ноль на N
Векторное поле	Дифференцирование $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$
Векторное расслоение E	$C^\infty(M)$-модуль его сечений $\Gamma(E)$
Тривиальное расслоение	Свободный $C^\infty(M)$-модуль
Подрасслоение, факторрасслоение, прямая сумма и тензорное произведение расслоений	Подрасслоение, факторрасслоение, сумма и тензорное произведение $C^\infty(M)$-модулей

Это соответствие очень полезно. Например, пусть задано отображение пространств сечений $\Gamma(E) \to \Gamma(E')$. Тогда если это отображение $C^\infty(M)$-линейно, то оно соответствует отображению самих расслоений, то есть сечению расслоения $\mathrm{Hom}(E, E') = E^* \otimes E'$.

Другой пример. Элементы $C^\infty(M)$-модуля $\Omega^k(M) \otimes \Gamma(E)$ называются k-формами со значениями в расслоении E. Они соответствуют сечениям расслоения $T^{\wedge k} M \otimes E$. В заданной тривиализации расслоения E они имеют вид $\sum \omega_i \otimes e_i$, где ω_i — k-формы, а сечения e_i расслоения E образуют базис его слоев в каждой точке. Это удобно: не нужно вводить координаты на M.

Лекция 6. Связность. Кривизна

Все понятия этой лекции полезно сравнивать с аналогичными понятиями для случая S^1-расслоений. Связность в векторном расслоении $E \to M$ — возможность дифференцировать его сечения вдоль векторных полей на базе M.

Определение. *Связностью* (ковариантным дифференцированием) называется отображение, сопоставляющее каждому сечению $s \in \Gamma(E)$ и векторному полю ξ на M новое сечение $\nabla_\xi s$, причем это отображение линейно по ξ и удовлетворяет правилу Лейбница по s,

$$\nabla_\xi f s = \xi f\, s + f \nabla_\xi s\ .$$

Пример: $E = T\mathbb{R}^n$, ∇ — покоординатное дифференцирование векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

Задача 1. Пусть ∇ — как в примере, $n = 2$. Найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1 \partial_r + u^2 \partial_\varphi$, $v = v^1 \partial_r + v^2 \partial_\varphi$ в полярных координатах на плоскости. (Ответ: $\nabla_u v = (\partial_u v_1)\partial_r + (\partial_u v^2)\partial_\varphi - u_2 v_2 r \partial_r + \frac{u_1 v_2 + u_2 v_1}{r} \partial_\varphi$.)

Другой пример: $M \subset \mathbb{R}^n$, $E = TM$. Ковариантная производная поля v вдоль поля ξ определяется так: нужно сперва продифференцировать v вдоль ξ покомпонентно, а затем ортогонально спроектировать на TM.

Задача 2. Пусть, как в примере, $M = S^2$ — единичная сфера, $E = TM$. Найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1 \partial_\varphi + u^2 \partial_\psi$, $v = v^1 \partial_\varphi + v^2 \partial_\psi$ в сферических координатах. (Ответ: $\nabla_u v = (\partial_u v_1)\partial_\varphi + (\partial_u v^2)\partial_\psi + u_2 v_2 \cos\varphi \sin\varphi \partial_\varphi - (u_1 v_2 + u_2 v_1) \operatorname{tg}\varphi \partial_\psi$.)

Задача 3. Пусть E — какое-нибудь тензорное расслоение, например, TM, или T^*M. Производная Ли L_ξ удовлетворяет правилу Лейбница. Является ли она связностью?

Линейность по ξ позволяет «собрать вместе» производные по разным направлениям и определить отображение пространств сечений $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$. Производная сечения s вдоль конкретного поля задается его сверткой с первым сомножителем в выражении для ∇s. Поэтому эквивалентным образом можно определить связность как отображение пространств сечений $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla fs = df\otimes s + f\nabla_\xi \ .$$

Задача 4. Как, зная производные $\nabla_{\partial_{x^i}} s$ вдоль базисных полей, определить полную производную ∇s, обратно?

Задача 5. Пусть $E = T^*M$, тогда $\Gamma(E) = \Omega^1(M)$. Правило Лейбница также стоит в основе определения внешнего дифференцирования $d\colon \Omega^1(M) \to \Omega^2(M) \subset \Omega^1(M)\otimes\Omega^1(M)$. Является ли оно связностью?

Выберем тривиализацию расслоения E в некоторой области $U \subset M$, то есть набор $\{e_i\}$ его сечений, образующих базис в каждом слое. Продифференцируем каждое e_i и разложим его по тому же базису, $\nabla e_j = \theta^i_j\otimes e_1$. Матрица $\theta = \theta^i_j$, состоящая из 1-форм, называется *матрицей связности.* Она полностью определяет ∇ в данной области: по определению $\nabla s^i e_i = ds^i\otimes e_i + s^i\theta^j_i\otimes e_j = (ds^i + \theta^i_j s^j)\otimes e_i$, или

$$\nabla s = ds + \theta s$$

в матричной форме, если s представлять как вектор-столбец. Наоборот, более подробно в координатах на M можно записать

$$\nabla_k s^i = \nabla_{\partial_{x^k}} s^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} s^j \ ,$$

где $\theta^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k$. Функции Γ^i_{jk} называются *символами Кристоффеля.* Таким образом, локально связность задается произвольным набором из $n\,N^2$ функций. Глобально пространство связностей является аффинным пространством над пространством сечений расслоения $\mathrm{Hom}(E, T^*M\otimes E) = E^*\otimes T^*M\otimes E$: разница любых двух связностей $\nabla_\xi s - \nabla'_\xi s$ линейна уже как по ξ, так и по s.

Задача 6. Для связностей задач 1,2 определите матрицы связности, символы Кристоффеля.

Сечение s называется *ковариантно постоянным* вдоль кривой $\gamma \subset M$, если $\nabla_{\dot\gamma} s = 0$. Условие ковариантной постоянности задает систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты s, и следовательно, задает линейное отображение $E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ слоев, называемое *параллельным переносом* вдоль кривой γ.

Связность называется *плоской*, если в окрестности каждой точки найдется репер, состоящий из сечений, ковариантно постоянных во всей окрестности, то есть существует тривиализация, в которой $\theta \equiv 0$. Выясним, когда связность плоская.

Попытаемся построить репер ковариантно постоянных сечений. Рассуждая по индукции по размерности многообразия M, мы можем считать, что $M = N \times (-1,1)$, и что на гиперповерхности $N = N \times \{0\}$ такой репер уже построен.

Продолжим эти сечения ковариантно постоянно вдоль кривых $\{y\}\times(-1,1)$, $y \in N$, то есть в направлении поля $\partial_t = \partial/\partial t$, $t \in (-1,1)$. Эти продолжения строятся, решая дифференциальные уравнения $\nabla_{\partial_t} s = 0$, или $\dot{s} = -\theta(\partial_t)s$, $t \in (-1,1)$. Проверим, являются ли они ковариантно постоянными в других направлениях. Для векторного поля ξ на N положим $s_\xi = \nabla_\xi s = \xi s + s\theta(\xi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_t \xi s &= \dot{s}_\xi - \partial_t\theta(\xi)\, s - \theta(\xi)\dot{s} = \dot{s}_\xi - \partial_t\theta(\xi)\, s + \theta(\xi)\theta(\partial_t)s\ , \\ \xi\partial_t s &= \xi\dot{s} = -\xi\theta(\partial_t)\, s - \theta(\partial_t)(\xi s) = -\xi\theta(\partial_t)\, s - \theta(\partial_t)s_\xi + \theta(\partial_t)\theta(\xi)s\ . \end{aligned}$$

Приравнивая, получаем

$$\dot{s}_\xi = -\theta(\partial_t)s_\xi - (\xi\theta(\partial_t) - \partial_t\theta(\xi) + \theta(\xi)\theta(\partial_t) - \theta(\partial_t)\theta(\xi))s\ ,$$

или $\dot{s}_\xi = -s_\xi\theta(\partial_t) - R(\xi,\partial_t)s$, где $\boxed{R = d\theta + \theta\wedge\theta}$ — матрица, состоящая из 2-форм, называемая *матрицей кривизны.* Из приведенной формулы видно, что необходимое и достаточное условие ковариантной постоянности продолженного репера имеет вид $R \equiv 0$. Для заданных векторных полей ξ,η на M числовая матрица $R(\xi,\eta)$ задает послойное линейное преобразование расслоения E. Ниже мы увидим, что R инвариантно задает глобальное сечение расслоения $T^{*\wedge 2}M\otimes E^*\otimes E$, называемое *тензором кривизны.* Пока лишь сформулируем доказанную теорему.

Теорема. *Связность является плоской тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.* □

Задача 7. Расставьте индексы в приведенной выкладке, чтобы перейти от матричной записи к координатной.

Ниже приведены различные интерпретации тензора кривизны.

Задача 8. Докажите, что при изменении тривиализации $e'_j = a^i_j e_i$ матрица кривизны заменяется на $R' = a^{-1}Ra$, как и положено для сечений расслоения $T^{*\wedge 2}M\otimes E^*\otimes E$.

Задача 9. Докажите, что отображение пространств сечений

$$R(\xi,\eta) = \nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$C^\infty(M)$-линейно, то есть соответствует глобальному отображению $R(\xi,\eta)\colon E \to E$ самого расслоения. Покажите, что матрица этого отображения в произвольной тривиализации совпадает с матрицей кривизны.

Задача 10. Докажите, что линейное преобразование слоя E_x, задаваемое параллельным обносом по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$, имеет вид $\mathrm{id} - \varepsilon^2 R(\xi,\eta) + o(\varepsilon^2)$.

Задача 11. Продолжим отображение $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$ до отображения $\nabla^{(k)}\colon \Omega^k(M)\otimes\Gamma(E) \to \Omega^{k+1}(M)\otimes\Gamma(E)$ по правилу

$$\nabla(\omega\otimes s) = d\omega\otimes s + (-1)^k\omega\wedge\nabla s\ .$$

Докажите, что отображение $\nabla^{(1)}\circ\nabla\colon \Gamma(E)\to\Omega^2(M)\otimes\Gamma(E)$ является $C^\infty(M)$-линейным и локально задается умножением на матрицу кривизны R.

Задача 12. Докажите, что в координатах коэффициенты тензора кривизны $R = R^i_{jkl}\,dx^k\otimes dx^l\otimes e_i\otimes e^{*j}$ имеют вид

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}\ .$$

В каких пределах меняются индексы в этом равенстве?

Сопряженная связность ∇^* на расслоении E^* определяется следующим условием: если сечения $u\in\Gamma(E^*)$ и $s\in\Gamma(E)$ ковариантно постоянны вдоль кривой γ, то величина (u,s) не меняется вдоль этой кривой. Это условие равносильно равенству

$$d(u,s) = (\nabla^*u,s) + (u,\nabla s)\ ,\quad \text{или, по другому,}\quad (\nabla^*_\xi u)(s) = \xi u(s) - u(\nabla_\xi s)$$

для произвольных сечений $u\in\Gamma(E^*)$, $s\in\Gamma(E)$ и поля ξ. В двойственном базисе $\{f^i\}$ матрица сопряженной связности θ^* имеет вид $0 = d(f^i,e_j) = \theta^j_i + \theta^{*i}_j$, т.е. $\theta^* = -\theta^\top$.

Из аналогичных соображений определяется связность $\nabla^{E\otimes F}$ на тензорном произведении расслоений E и F со связностями ∇^E и ∇^F:

$$\nabla^{E\otimes F}u\otimes v = (\nabla^E u)\otimes v + u\otimes(\nabla^F v),\qquad \nabla^{E\otimes F}_\xi u\otimes v = (\nabla^E_\xi u)\otimes v + u\otimes(\nabla^F_\xi v)\ .$$

В дальнейшем мы, как правило, будем использовать обозначение ∇ как для сопряженной связности, так и для связностей на всех тензорных степенях E.

Лекция 7. Риманова связность. Симметрии тензора кривизны

Пусть $E = TM$ — касательное расслоение. Связность ∇ на касательном расслоении называется *симметричной*, если выполнено любое из следующих равносильных условий:

1) символ Кристоффеля симметричен по нижним индексам $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$;

2) $\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi,\eta]$ для произвольных векторных полей на M.

3) Альтернирование сопряженной связности $\nabla\colon\Omega^1(M)\to\Omega^1(M)\otimes\Omega^1(M) = \Gamma(T^{*\otimes 2}M)$ совпадает (с точностью до множителя) с внешним дифференциалом, $2(\nabla\omega)_{\mathrm{alt}} = d\omega$ для всякой 1-формы ω.

Задача 1. Выберите любое свойство, по вкусу, и выведите из него остальные.

Задача 2. Докажите, что симметричная связность существует на любом многообразии. От скольких произвольных функций она зависит локально?

Взглянем на последнее свойство подробнее. Пусть $\sigma\colon T^{*\otimes 2}M\to T^{*\otimes 2}M$ — операция перестановки множителей.

Задача 3. Докажите, что операция $\nabla^-\omega = \sigma\nabla\omega + d\omega$ определяет связность на T^*M, что равносильно тому, что операция $T(\omega) = \nabla^-\omega - \nabla\omega$ линейна по ω, т.е. является тензором.

Построенный тензор $T \in \mathrm{Hom}(\Omega^1(M), \Omega^1(M)\otimes\Omega^1(M)) = \Gamma(TM\otimes T^{*\otimes 2}M) = \mathrm{Hom}(T^{\wedge 2}M, TM)$ называется *тензором кручения*. В последнем представлении он сопоставляет паре полей ξ, η поле $T(\xi,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta]$. Координаты тензора кручения имеют вид $T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$. У симметричной связности тензор кручения равен нулю.

Теорема. *Симметричная связность на TM является локально евклидовой, т.е. имеет символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ в некоторой карте на M тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.*

Доказательство. По теореме из предыдущей лекции, в окрестности каждой точки существует репер $\{e_i(x)\}$, состоящий из ковариантно постоянных векторных полей. Двойственный репер $\{e^{*i}\}$ в расслоении T^*M также ковариантно постоянный. Если связность симметрична, то 1-формы e^{*i} — замкнуты, то есть локально $e^{*i} = dx^i$. Построенные функции x^i можно принять за локальные координаты. В этих координатах $e_i = \partial_{x^i}$ — ковариантно постоянные векторные поля, что и требовалось. □

В отличие от симметричной связности, определенной для TM, понятие связности, согласованной с римановой структурой, имеет смысл для произвольного расслоения $E \to M$.

Риманова структура на расслоении E — семейство положительно определенных квадратичных форм g_x на слоях E_x. Например, риманова структура на многообразии — это по определению, риманова структура на его касательном расслоении. Риманова структура задает отождествление $E \to E^*$: $v \mapsto g_x(v,\cdot)$. Имея ввиду это отождествление, мы будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ как спаривание векторов и ковекторов, так и скалярное произведение.

Связность ∇ называется *согласованной с римановой структурой*, если ∇ совпадает с сопряженной связностью ∇^* при этом отождествлении.

Задача 4. Докажите, что согласованность с римановой структурой равносильна

1) равенству $d(u,v) = (\nabla u, v) + (u, \nabla v)$, т.е. $\xi(u,v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v)$ для произвольных сечений $u, v \in \Gamma(E)$;

2) равенству $\nabla g = 0$, где g рассматривается как сечение расслоения $E^*\otimes E^*$.

Задача 5. Докажите, что связность, согласованная с римановой структурой, существует на любом расслоении. От скольких произвольных функций она зависит локально?

Теорема. *В касательном расслоении риманова многообразия существует единственная симметричная связность, согласованная с римановой структурой.*

Такая связность называется *связностью Леви-Чивиты.*

Доказательство. Чтобы определить производную $\nabla_{\xi_1}\xi_2$ одного поля вдоль другого, достаточно знать его скалярное произведение $(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3)$ с любым наперед заданным полем ξ_3. Зафиксируем тройку полей ξ_1, ξ_2, ξ_3, и рассмотрим 6 функций $(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Условие согласованности с римановой структурой накладывает на них три уравнения

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) + (\nabla_{\xi_k}\xi_i, \xi_j) = \xi_k(\xi_i, \xi_j)\ .$$

Условие симметричности $\nabla_{\xi_k}\xi_j - \nabla_{\xi_j}\xi_k = [\xi_k, \xi_j]$ дает еще три

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) - (\nabla_{\xi_j}\xi_k, \xi_i) = ([\xi_k, \xi_j], \xi_i) \ .$$

Разрешая полученную систему шести уравнений от шести неизвестных, определяем ее решения, в частности,

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) = \frac{1}{2}\Big(\xi_k(\xi_i, \xi_j) - \xi_i(\xi_j, \xi_k) + \xi_j(\xi_i, \xi_k) - ([\xi_j, \xi_k], \xi_i) + ([\xi_i, \xi_k], \xi_j) + ([\xi_i, \xi_j], \xi_k)\Big) \ .$$

Остается лишь проверить, что полученное выражение линейно по ξ_i, ξ_k и удовлетворяет правилу Лейбница по ξ_j. □

Для векторного поля ξ обозначим через $\gamma_\xi = (\xi, \cdot)$ двойственную 1-форму. Тогда полученная формула для связности Леви-Чивиты эквивалентна (докажите!)

$$(\nabla\xi_j, \xi_i) = \frac{1}{2}(d(\xi_i, \xi_j) - L_{\xi_i}\gamma_{\xi_j} + L_{\xi_j}\gamma_{\xi_i} + \gamma_{[\xi_i, \xi_j]}) \ .$$

Приведенные формулы, примененные к базисным векторам, позволяют получить явный вид коэффициентов связности. Он упрощается в двух частных случаях.

Задача 6. Покажите, что в базисе *коммутирующих* полей ∂_{x^i} коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = 1/2 g^{il}(\partial_{x^k} g_{lj} + \partial_{x^l} g_{jk} - \partial_{x^j} g_{lk}) \ .$$

Задача 7. Покажите, что в *ортонормированном* базисе полей $\{\xi_i\}$ коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = 1/2(c^i_{kj} + c^j_{ik} + c^k_{ij}) \ , \qquad \text{где } [\xi_i, \xi_j] = c^k_{ij}\xi_k \ .$$

Вот другое непосредственное следствие приведенных формул.

Теорема. *Пусть $N \subset M$ — подмногообразие риманова многообразия M. Рассмотрим связность на N, которая задается дифференцированием полей в связности Леви-Чивиты на M с последующим ортогональным проектированием на TN. Полученная связность совпадает со связностью Леви-Чивиты на N.* □

Мы лишний раз убеждаемся, что операция параллельного переноса касательных векторов на поверхности в $\mathbb{R}^3$, как она была определена в одной из первых лекций, относится к внутренней геометрии поверхности.

Теорема. *Риманова структура на M является локально евклидовой, т.е. приводится к виду $\sum(dx^i)^2$ локальной заменой координат тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности Леви-Чивиты тождественно равен нулю.*

Доказательство. Поскольку связность Леви-Чивиты симметрична, существует система координат, в которой ее символы Кристоффеля обращаются в ноль. В этих координатах условие согласованности связности с римановой метрикой g_{ij} имеет вид $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0$, т.е. квадратичная форма $g_{ij}dx^i\,dx^j$ имеет постоянные коэффициенты, и аффинной заменой она приводится к сумме квадратов. □

Теорема (симметрии тензора кривизны). *Пусть R — тензор кривизны связности Леви-Чивиты на римановом многообразии. Тогда для произвольных векторных полей $X, \ldots, U$ справедливы равенства*

1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$;
2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y$;
3) $(R(X,Y)Z,U) + (Z,R(X,Y)U) = 0$;
4) $(R(X,Y)Z,U) = (R(Z,U)X,Y)$.

В другой формулировке, рассмотрим тензор, получаемый опусканием верхнего индекса в тензоре кривизны $R_{ijkl} = (R(\partial_{x^k}, \partial_{x^l})\partial_{x^j}, \partial_{x^i}) = g_{ip}R^p_{jkl}$. Тогда этот тензор кососимметричен по первой и последней паре индексов, не меняется при замене этих пар индексов между собой, и сумма его компонент при циклической перестановке трех индексов равна нулю,

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}\ , \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0\ .$$

Доказательство несколько упрощается следующим замечанием: в силу полилинейности теорему достаточно доказать только для случая коммутирующих полей.

Равенство 1) входит в определение; оно справедливо для тензора кривизны любой связности на любом расслоении.

Равенство 2) вытекает из формулы задачи 5 предыдущей лекции и соотношения $\nabla_\xi \eta = \nabla_\eta \xi$, верного для симметричной связности и коммутирующих полей (для выполнения этого равенства согласованность с римановой структурой не нужна).

Далее, равенство 3) отражает тот факт, что параллельный перенос по маленькому замкнутому контуру в плоскости векторов X, Y сохраняет риманову структуру. Формально, согласованность связности с римановой структурой дает

$$\begin{aligned} XY(Z,U) &= X(\nabla_Y Z, U) + X(Z, \nabla_Y U) = \\ &(\nabla_X \nabla_Y Z, U) + (\nabla_Y Z, \nabla_X U) + (\nabla_X Z, \nabla_Y U) + (Z, \nabla_X \nabla_Y U)\ . \end{aligned}$$

Вычисляя аналогично $YX(Z,U)$ и приравнивая полученные выражения, получаем равенство 3) (для его справедливости симметричность связности не требуется, более того, это равенство справедливо для связности согласованной с римановой структурой на произвольном расслоении).

Наконец, равенство 4) является алгебраическим следствием равенств 2) и 3) (докажите самостоятельно). $\square$

Пространство 4-линейных форм на n-мерном векторном пространстве, удовлетворяющих соотношениям 1)–4), называется *пространством тензоров кривизны.*

Задача 8. Найдите размерность пространства тензоров кривизны при $n = 2; 3; 4$; произвольном n.

Тензором Риччи называется свертка тензора кривизны, т.е. билинейная форма, равная следу оператора $\mathrm{Ric}(X,Z) = \mathrm{tr}\,(Y \mapsto R(Y,Z)X)$. В координатах, $R_{ql} = R^i_{qil}$. *Скалярной кривизной* называется след оператора Риччи, $R = g^{ql}R_{ql} = g^{ql}R^i_{qil}$.

Задача 9. Что дает свертка тензора кривизны по другой паре индексов?

Задача 10. Докажите, что при $n = 2$ в произвольном базисе $R = 2\frac{R_{1212}}{\det|g|}$.

Теорема. *Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда $R = 2K$, где K — гауссова кривизна.*

Доказательство. При $n = 2$ в ортонормированном базисе тензор кривизны полностью определяется компонентой $R^1_{212} = \frac{1}{2}R$. Поэтому матрица преобразования касательной плоскости при параллельном переносе вдоль границы куска поверхности площади σ в ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - R^1_{112}\sigma & -R^1_{212}\sigma \\ -R^2_{112}\sigma & 1 - R^2_{212}\sigma \end{pmatrix} + o(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}R\sigma \\ \frac{1}{2}R\sigma & 1 \end{pmatrix} + o(\sigma)\ .$$

Это — поворот на угол $\approx \frac{1}{2}R\sigma$. С другой стороны, мы знаем, что угол этого поворота равен $\approx K\sigma$. □

Алгебраические соотношения, приводящие к равенству теоремы, будут приведены в следующей лекции.

Задача 11. Докажите, что при $n = 3$ тензор кривизны полностью определяется тензором Риччи.

Задача 12. Разберитесь в следующей таблице

Связность в расслоении, ее матрица $\theta = \theta^i_j = \Gamma^i_{jk}\, dx^k$	Символы Кристоффеля Γ^i_{jk}
Ковариантная производная $\nabla s^i e_i = (ds^i + \theta^i_j s^j)\otimes e_i$, или $\nabla_\xi s = \xi s + \theta(\xi)s$ $d(u,v) = (\nabla u, v) + (u, \nabla v)$, $\nabla u\otimes v = (\nabla u)\otimes v + u\otimes(\nabla v)$	$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}T^j$, $\nabla_k T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}T_i$, $\nabla_k T^I_J = \frac{\partial T^I_J}{\partial x^k} - T^I_{jj_2\dots j_q}\Gamma^j_{j_1k} - \dots - T^I_{j_1\dots j_{q-1}j}\Gamma^j_{j_qk} +$ $T^{ii_2\dots i_p}_J\Gamma^{i_1}_{ik} + \dots + T^{i_1\dots i_{p-1}i}_J\Gamma^{i_p}_{ik}$
Замена тривиализации $e'_i = a^j_i e_j$, $\theta' = a^{-1}da + a^{-1}\theta a$	Замена координат $x^i \rightsquigarrow y^{i'}$, $\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial y^{k'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^{j'}\partial y^{k'}})$
Связность Леви-Чивиты на TM $g\theta = \frac{1}{2}\|\|dg_{ij} - L_i\gamma_j + L_j\gamma_i\|\|$ $(\gamma_i = g_{ik}dx^k)$	$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j})$
Тензор кручения $T(\xi,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta]$	$T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$
Тензор кривизны $R = d\theta + \theta\wedge\theta = R^i_{jkl}dx^k\otimes dx^l$ $R(\xi,\eta) = \nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}$	$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}$ $R(\xi,\eta) = R^i_{jkl}\xi^k\eta^l$

Лекция 8. Уравнения Петерсона-Кодацци

Пусть дана двумерная поверхность M и два семейства квадратичных форм $g_{ij}du^i\,du^j$ и $h_{ij}du^i\,du^j$ на ней, первая из которых положительно определена. Система уравнений П.–К. на коэффициенты g_{ij}, h_{ij}, является необходимым и достаточным условием того, что в окрестности данной точки g и h являются I и II квадратичными формами относительно некоторого вложения $M \to \mathbb{R}^3$. Вывод этих уравнений иллюстрирует полезность рассмотрения связностей на произвольных расслоениях.

Пусть сперва $M \subset \mathbb{R}^3$. Касательное расслоение TM является подрасслоением в (тривиальном) трехмерном расслоении, состоящем из всех векторов, приложенных в точках поверхности. Дополнительным одномерным расслоением является нормальное расслоение $\mathbb{R}n$, где n — поле единичных нормалей к M. Для касательного векторного поля ξ и произвольного поля $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ вдоль M обозначим через $\partial_\xi \eta = (\partial_\xi \eta^1, \partial_\xi \eta^2, \partial_\xi \eta^3)$ покоординатную производную поля η вдоль ξ. Очевидно, что ∂ — (плоская) связность.

Лемма (деривационные формулы). *Производная ∂_ξ полностью определяется* I *и* II *квадратичными формами,*

$$\begin{cases} \partial_\xi \eta &= \nabla_\xi \eta + h(\xi, \eta) n \\ \partial_\xi n &= -A(\xi) \end{cases}$$

Здесь η — касательное поле, ∇ — связность Леви-Чивиты на M, а $A_x\colon T_xM \to T_xM$ — симметричный оператор, задаваемый соотношением $h_x(\cdot,\cdot) = g_x(A_x\cdot,\cdot)$.

Если M параметризованна отображением $r(u^1, u^2)$, то в координатах деривационные формулы имеют вид

$$\partial_k r_j = \Gamma^i_{jk} r_i + h_{kj} n\ ; \qquad \partial_k n = -A^i_k r_i\ ; \qquad r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}, \quad A^i_k = g^{ij} h_{jk}.$$

Доказательство. Пусть поле η касается M. По определению ковариантной производной, $\nabla_\xi \eta$ есть касательная составляющая производной $\partial_\xi \eta$. Ортогональная составляющая этой производной $\partial_\xi \eta = \partial_\xi \partial_\eta r$ есть, по определению II квадратичной формы, $h(\xi, \eta) n$.

Далее, $0 = \partial_\xi(n, n) = 2(\partial_\xi n, n)$, то есть поле $\partial_\xi n$ касается M. Дифференцируя равенство $(n, \eta) = 0$, получаем $(\partial_\xi n, \eta) = -(n, \partial_\xi \eta) = -h(\xi, \eta)$. □

Пусть теперь M — произвольная поверхность, и g, h — квадратичные формы на ней, как выше. Рассмотрим на M трехмерное расслоение $E = TM \oplus \nu$, где $\nu = \mathbb{R}n$ — тривиальное одномерное расслоение. Определим связность $\widetilde{\nabla}$ на E формулами из леммы. Уравнения П.–К. имеют вид $\widetilde{R} = 0$, где $\widetilde{R}$ — тензор кривизны $\widetilde{\nabla}$. Явный вид этих уравнений обсудим позже.

Теорема. *Пусть в некоторой области U переменных u^1, u^2 заданные квадратичные формы g_{ij}, h_{ij} таковы, что определяемая ими связность имеет нулевой тензор кривизны $\widetilde{R} = 0$. Тогда существует параметризованная поверхность $r(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^3$, реализующая их в качестве первой и второй квадратичной формы.*

Доказательство. Поскольку $\widetilde{R} = 0$, у расслоения E имеется набор ковариантно постоянных сечений e_1, e_2, e_3. Заметим, что связность $\widetilde{\nabla}$ согласована с римановой структурой прямого произведения на E, в которой $|n|^2 = 1$. Следовательно, попарные скалярные произведения (e_i, e_j) — постоянные функции, и сделав линейную замену, при необходимости, мы можем считать, что $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Далее, двойственный репер e^{*i} расслоения E^* также ковариантно постоянный, и поскольку касательная составляющая связности $\widetilde{\nabla}$ симметрична, ограничение линейных форм e^{*i} на TM задает замкнутые дифференциальные формы $dx^i = e^{*i}\Big|_{TM}$. Функции $(x^1, x^2, x^3)\colon M \to \mathbb{R}^3$ осуществляют требуемое вложение. □

Найдем явный вид уравнений П.К. Если $\widetilde{R}$ — матрица кривизны, то из согласованности с римановой структурой следует, что матрица $\widetilde{g}\widetilde{R}$ с компонентами $(\widetilde{R}e_j, e_i)$ кососимметрична. Компоненты этой кососимметричной матрицы — 2-формы, т.е. формы старшей степени на M, или по-существу, функции. Поэтому равенство $\widetilde{R} = 0$ задает три независимых уравнения. Явно, в базисе $e_1 = \partial_{u^1}, e_2 = \partial_{u^2}, e_3 = n$, имеем

$$\widetilde{\theta} = \begin{pmatrix} \theta & -g^{-1}h^\top \\ h & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где строка} \quad h = \{h_j\} = \{h_{jk}dx^k\}, \quad \text{и} \quad g = \{g_{ij}\}.$$

Отсюда
$$\widetilde{R} = d\widetilde{\theta} + \widetilde{\theta}\wedge\widetilde{\theta} = \begin{pmatrix} d\theta + \theta\wedge\theta - g^{-1}h^\top \wedge h & -d(g^{-1}h^\top) - \theta\wedge(g^{-1}h^\top) \\ dh + h\wedge\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Независимые соотношения, получаемые из равенства $\widetilde{R} = 0$, имеют вид $h^\top \wedge h = gR$ и $dh = -h\wedge\theta$. Первое дает одно уравнение

$$\det h = R_{1212}\ .$$

Это уравнение (впервые полученное Гауссом) эквивалентно теореме о связи гауссовой и скалярной кривизны. Второе соотношение дает еще два уравнения

$$\frac{\partial h_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial u^2} = \Gamma^j_{11}h_{j2} - \Gamma^j_{12}h_{j1}\ ,$$
$$\frac{\partial h_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial h_{21}}{\partial u^2} = \Gamma^j_{21}h_{j2} - \Gamma^j_{22}h_{j1}\ . \qquad \square$$

Задача 1. Для приведенных ниже метрик определите связность θ, гауссову кривизну K. В случае, когда $K \equiv 0$, найдите координаты, в которых метрика принимает евклидовый вид.

а) $g = (1+\varphi^2)\,dx^2 + 2\varphi\,dx\,dy + dy^2$, где $\varphi = \varphi(x)$;

б) $g = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\,d\psi^2$;

в) $g = dx^2 + x^2\,dy^2$.

Лекция 9. Геодезические

Кривая $\gamma(t)$ на римановом многообразии M называется *геодезической*, если ее касательный вектор параллелен вдоль самой кривой, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. В координатах уравнение геодезической имеет вид

$$\ddot{x} = -\theta(\dot\gamma) \qquad \text{или} \qquad \ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k\ .$$

Эти соотношения задают обыкновенное дифференциальное уравнение (то есть векторное поле) на $2n$-мерном пространстве TM касательного расслоения. Задание начального вектора (вместе с точкой приложения) однозначно задает всю геодезическую. Приведем стандартные интерпретации уравнения геодезических. Рассмотрим метрику g как функцию $T(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2}g(\xi,\xi)$, заданную на пространстве касательного расслоения и квадратичную на слоях (в механике T называется кинетической энергией).

Задача 1. Докажите, что геодезические являются траекториями движения частицы с кинетической энергией T, а именно, справедливы следующие эквивалентные утверждения (эквивалентность а)–в) обычно доказывается на одной из первых лекций стандартного курса механики).

а) Геодезическая, соединяющая точки $a, b \in M$, является экстремалью функционалов длины и действия

$$l(\gamma) = \int_g dl = \int_g \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt\ , \qquad S(\gamma) = \int_\gamma T(\dot\gamma)\, dt = \frac{1}{2}\int_\gamma g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j\, dt$$

на пространстве гладких кривых, соединяющих точки a и b.

б) Уравнение геодезических имеет вид уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0\ .$$

в) При отождествлении $TM = T^*M$, задаваемом римановой структурой, уравнение геодезических принимает вид уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = \frac{\partial T}{\partial x^i};\quad \dot{x}^i = -\frac{\partial T}{\partial p_i}, \qquad p_i = g_{ij}\dot{x}^j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}.$$

Часто и обратно, механическую задачу можно свести к исследованию геодезического потока на некотором римановом многообразии. В другой интерпретации, можно рассматривать возмущение (например, световую волну), распространяющееся в неоднородной среде, свойства которой описываются метрикой g. Согласно принципу Гюйгенса, возмущение распространяется, минимизируя длину, то есть вдоль геодезических.

При изометриях геодезические переходят в геодезические, поэтому при помощи них легко строить инварианты (как локальные, так и глобальные) римановых многообразий. Например, они «почти» определяют систему координат в окрестности каждой точки $x \in M$. *Экспоненциальное отображение* сопоставляет вектору $\xi \in T_xM$ точку $\gamma(1)$ на геодезической, заданной начальным условием $\dot\gamma(0) = \xi$. Экспоненциальное отображение задает карту в окрестности точки x, называемую *нормальными координатами*. Нормальные координаты определены с точностью до вращения, то есть элемента группы $O(n)$.

Задача 2. а) Найдите производную (т.е. матрицу Якоби) экспоненциального отображения. Докажите, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом некоторой области касательного пространства T_xM на окрестность точки x. Докажите, что любые две достаточно близкие точки можно соединить единственной геодезической, не выходящей из окрестности этих точек.

б) Докажите, что в нормальных координатах символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(0)$ обращаются в ноль, и более того,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{iklj}x^kx^l + o(|x|^2), \qquad \Gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{3}(R^i_{jlk} + R^i_{klj})x^l + o(|x|).$$

Геодезическая локально минимизирует расстояние между данными точками до тех пор, пока на этой геодезической не появляются пары сопряженных точек. Точка B на геодезической называется *сопряженной* точке A на той же геодезической, если бесконечно близкая геодезическая, выходящая из A, также проходит через B. Например, южный полюс на сфере сопряжен северному (вдоль любой геодезической). При прохождении сопряженной точки у квадратичной формы второй вариации функционала действия (или длины) индекс возрастает на один (добавляется один отрицательный квадрат). Более формальное определение заключается в том, что сопряженные точки — критические значения экспоненциального отображения. Сопряженные точки находятся, варьируя уравнение для геодезических. Пусть $\gamma(t)$ — заданная геодезическая, отнесенная к натуральному параметру, $V(t)$ — поле ее единичных касательных. Поле $J(t)$ вдоль γ называется *якобиевым*, если оно – начальное поле некоторого семейства геодезических $\gamma_\lambda(t)$, $J = \frac{\partial\gamma}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}$. Всякое якобиево поле удовлетворяет уравнению

$$\ddot{J} - R(V, J)V = 0\ ,$$

где точка — (ковариантная) производная по натуральному параметру. Действительно, поля $J = \partial_\lambda$ и $V = \partial_t$ коммутируют на плоскости переменных λ, t, поэтому

$$R(V, J)V = \nabla_V\nabla_J V - \nabla_J\nabla_V V = \nabla_V\nabla_V J \qquad \square$$

(мы воспользовались тождеством $\nabla_V V \equiv 0$ и свойством $\nabla_J V = \nabla_V J$ симметричности связности). Далее, разложим J на касательную и ортогональную составляющие. Обе они являются якобиевыми полями. Касательная составляющая отвечает перепараметризации геодезической, поэтому можно считать, что она равна нулю, и $J(t) = y(t)N$, где N — вектор единичной нормали. Отметим, что $N(t)$, как и $V(t)$, ковариантно постоянны вдоль γ, и кроме того, $R(V, N)V = -kN$, где k — гауссова кривизна. Отсюда $\ddot{J} - R(V, J)V = (\ddot{y} + k(t)y)N$, т.е. функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{y} + k(t)y = 0$.

Задача 3. Докажите, что решения уравнения $\ddot{y} + k(t)y = 0$, $k(t) \leqslant k_0 < 0$, имеют не более одного нуля.

Задача 4. Докажите, что соседние нули всякого решения уравнения $\ddot{y} + k(t)y = 0$, $k(t) \geqslant k_0 > 0$, отстоят не далее, чем в случае аналогичного уравнения с $k \equiv k_0$, т.е. на $\pi/\sqrt{k_0}$.

Вот примеры глобальных утверждений, полученных рассмотрением геодезических. Пусть риманово многообразие *полно*, т.е. всякая геодезическая может быть неограниченно продолженна. На полном многообразии любые две точки соединяются геодезической минимальной длины.

а) если $k \leqslant 0$, то на M нет пар сопряженных точек, откуда следует, что универсальная накрывающая M диффеоморфна $\mathbb{R}^2$, и M есть фактор евклидова пространства по дискретной группе диффеоморфизмов.

б) если $k \geqslant k_0 > 0$, то длина геодезической между любыми двумя точками ограничена, откуда следует, что M компактно.

Рассмотрим экспоненциальное отображение на выпуклой поверхности общего положения в $\mathbb{R}^3$. На каждой геодезической, выходящей из точки x, имеется первая сопряженная точка, вторая, и т.д. Кривая, образованная n-ми сопряженными точками, называется n-м фокальным множеством точки x. *Последняя гипотеза Якоби* утверждает, что *на каждом n-м фокальном множестве имеется не менее четырех точек возврата.*

Если M —стандартная сфера, а x — северный полюс, то первое фокальное множество — южный полю, второе — северный полюс и т.д. Эта ситуация сильно вырожденная, и после маленького шевеления сферы (или метрики на ней) каждое фокальное множество превращается в кривую, имеющую точки возврата. Локальной моделью этой ситуации служит эволюта кривой, близкой к окружности (то есть фокальное множество геодезических евклидовой метрики, ортогональных данной кривой, см. первую лекцию).

В настоящее время доказано, что n-е фокальное множество имеет не менее четырех точек возврата для всякой метрики, достаточно близкой к сферической. Это утверждение является одним из вариантов обобщения теоремы о четырех вершинах. В общем случая гипотеза остается недоказанной, даже для эллипсоидов (несмотря на то, что уравнение геодезических для эллипсоида явно интегрируется в эллиптических функциях).

Задача 5. Докажите, что всякая изометрия связного риманова многообразия, неподвижно действующая на некоторой касательной плоскости, является тождественным преобразованием.

Задача 6. Вычислите группу изометрий а) сферы б) одной из пол конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Плоскостью Лобачевского L называется компонента $z > 0$ гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, снабженная римановой структурой, индуцированной из *псевдоримановой* метрики $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ переводит L в круг $x^2 + y^2 < 1$ (модель Пуанкаре). Дробно-линейное преобразование $w = i(1-z)/(1+z)$, переводит круг $|z|^2 < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (модель Клейна).

Задача 7. а) Вычислите метрику на плоскости Лобачевского во всех трех моделях.
б) Определите кривизну.
в) Найдите все геодезические.
г) Определите группу изометрий.

Лекция 10. Характеристические классы

Векторное расслоение E четной размерности $2n$ называется *комплексным*, если на его слоях заданы непрерывно зависящие от точки базы операторы $J_x \colon E_x \to E_x$, $x \in M$, такие что $J^2 = -\mathbf{1}$. Слои комплексного расслоения являются n-мерными векторными пространствами над полем комплексных чисел (J рассматривается как умножение на $\sqrt{-1}$). Заметим, что на базе расслоения никакой голоморфной или комплексной структуры не предполагается.

Связность ∇ в комплексном расслоении называется *комплексной*, если она сохраняет комплексную структуру в пространстве сечений, т.е. $\nabla_\xi Js = J\nabla_\xi s$ для произвольного сечения s и векторного поля ξ на M. Оператор кривизны $R(\xi, \eta) \colon E_x \to E_x$ комплексной связности также является комплексным (докажите!).

Напомним, что когомологиями де-Рама гладкого многообразия M называются когомологии комплекса

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots ,$$

то есть последовательность пространств

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) = \operatorname{Ker}\Big(\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M)\Big) \Big/ \operatorname{Im}\Big(\Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M)\Big) .$$

Характеристическим классом комплексного, вещественного, или произвольного топологического расслоения E называется замкнутая дифференциальная форма ω, заданная на базе расслоения, которая строится при помощи дополнительной структуры в расслоении (например, связности или метрики) и которая при изменении этих структур меняется на точную[1]. Таким образом, класс $[\omega] \in H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ этой формы не зависит от этих дополнительных структур. Если M компактно, ориентированно, и его размерность равна степени формы ω, то *характеристическое число* $\omega(E) = \int_M \omega$ является топологическим инвариантом расслоения.

Пример: первый класс Чженя. а) Пусть $E \to M$ — комплексное линейное (т.е. одномерное) расслоение, и ∇ — некоторая комплексная связность. Оператор кривизны $R(\xi,\eta)$ действует на комплексной прямой E_x умножением на комплексное число $\omega(\xi,\eta)$. Положим $c_1 = -\frac{\omega}{2\pi i}$. (2-форма c_1 — комплекснозначная. Нас интересует ее вещественная часть; мнимая часть задает нулевой класс.)

б) Пусть $E \to M$ — двумерная ориентированное расслоение. Зафиксируем риманову структуру. Выберем произвольную связность, согласованную с римановой структурой. Матрица оператора кривизны в ортогональном базисе кососимметрична, то есть имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Положим $c_1 = -\frac{\omega}{2\pi}$.

в) Пусть $W \to M$ — S^1 расслоение. Возьмем произвольную S^1-связность на нем. 1-форма связности в локальной тривиализации имеет вид $\eta = d\varphi + \theta$. Положим $c_1 = -\frac{\omega}{2\pi}$, где $\omega = d\theta$.

Во всех трех случаях 2-форма c_1 называется *первым классом Чженя* или *классом Эйлера* соответствующего расслоения. В действительности, эти три примера эквивалентны. Действительно, пусть задано двумерное риманово расслоение E с римановой связностью, как в б).

б)$\rightsquigarrow$а): определим J как поворот на угол $\pi/2$ в каждом слое. Тогда E превращается в одномерное комплексное расслоение с комплексной связностью.

б)$\rightsquigarrow$в): возьмем в качестве W расслоение векторов единичной длины в E. Определим связность на W условием: сечение s расслоения W ковариантно постоянно вдоль некоторой кривой на M тогда и только тогда, когда оно ковариантно постоянно, как сечение расслоения E.

Задача 1. Найдите связь между 2×2-матрицей $\theta_{\mathbb{R}}$ связности вещественного расслоения в ортогональном базисе, 1×1 матрицей $\theta_{\mathbb{C}}$ комплексного и 1-формой θ_{S^1} соответствующего S^1-расслоения. (Ответ: $\theta_{\mathbb{R}} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\theta_{S^1} \\ \theta_{S^1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\theta_{\mathbb{C}} = i\theta_{S^1}$.)

Задача 2. Докажите, что при этих соответствиях первый класс Чженя переходит в первый класс Чженя.

Пример. Пусть M — риманова поверхность, u_1, u_2 — ортонормированная пара векторных полей, и пусть $[u_1,u_2] = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. Тогда по формуле из лекции 7 для связности Леви-Чивиты

$$(\nabla_\xi u_j, u_i) = -\frac{1}{2}\Big(([u_j,\xi],u_i) + ([\xi,u_i],u_j) + ([u_j,u_i],\xi)\Big)\ , \quad \xi = u_k\ ,$$

откуда $\nabla_{u_1} u_1 = -\alpha_1 u_2$, $\nabla_{u_2} u_1 = -\alpha_2 u_2$, $\nabla_{u_1} u_2 = \alpha_1 u_1$, $\nabla_{u_2} u_2 = \alpha_2 u_1$, то есть $\nabla_\xi u_1 = \theta(\xi) u_2$, $\nabla_\xi u_2 = -\theta(\xi) u_1$, где θ является 1-формой связности соответствующего S^1-расслоения и определяется равенствами $\theta(u_1) = -\alpha_1, \theta(u_2) = -\alpha_2$.

[1] Приведенное высказывание не есть, вообще говоря, истинное определение характеристического класса, которое мы скрываем от слушателей, и которое нуждается в понятии когомологий.

Замечание. Примеры а)–в) являются простейшими случаями трех различных теорий: теории комплексных расслоений и характеристических классов Чженя; теории вещественных расслоений и характеристических классов Эйлера-Понтрягина и теории главных G-расслоений и их характеристических классов. Эквивалентность примеров а)–в) является проявлением «случайного» изоморфизма $U(1) \cong SO(2) \cong S^1$.

Покажем, что c_1 действительно является характеристическим классом, т.е. что 2-форма c_1 не зависит от тривиализации и что при замене связности (или метрики) форма меняется на когомологичную. Для S^1-расслоений это доказано в лекции 4. Рассмотрим случай комплексных линейных расслоений. Связность задается комплексной 1×1 матрицей θ из 1-форм, то есть просто комплекснозначной 1-формой. Ее матрица кривизны равна $d\theta + \theta \wedge \theta = d\theta$, т.е. $c_1 = -\frac{d\theta}{2\pi i}$. При замене тривиализации θ заменяется на $a^{-1}da + a^{-1}\theta a = \theta + d\ln a$, поэтому форма кривизны и, соответственно, c_1 не меняются. При изменении связности θ заменяется на $\theta' = \theta + \alpha$, где α соответствует глобальному сечению расслоения $\mathrm{Hom}(TM, E^* \otimes E)$, т.е. α является 1-формой, заданной на всем многообразии M. Поэтому c_1 заменяется на $c_1' = c_1 - d\frac{\alpha}{2\pi i}$, что и требовалось доказать.

Так же просто показывается, что для ориентированных вещественных расслоений класс c_1 корректно определен и не зависит от выбора римановой связности. Проверка инвариантности относительно заменен метрики требует более громоздких выкладок. В качестве компенсации покажем, что характеристическое число всегда является целым. Поскольку при изменении метрики характеристическое число меняется непрерывно, отсюда следует, что оно не зависит от метрики.

Теорема. *Для произвольного ориентированного двумерного расслоения E над компактной ориентированной поверхностью M характеристическое число $c_1(E) = \int\limits_M c_1$ является целым.*

Доказательство. Мы можем выбрать любое описание а)–в) силу их эквивалентности. Для примера, будем рассуждать на языке S^1-расслоений (см. лекцию 4). Итак, M покрыто областями U_α, над каждой областью фиксирована тривиализация φ_α и на пересечении каждых двух областей $U_\alpha \cap U_\beta$ заданы функции перехода $u_{\alpha\beta} = -u_{\beta\alpha}$ такие, что $\varphi_\beta = \varphi_a + u_{\alpha\beta}$. При этом если пересечение областей $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ непусто, то на этом пересечении $u_{\alpha_1\alpha_2} + \cdots + u_{\alpha_{k-1}\alpha_k} + u_{\alpha_k\alpha_1} \in 2\pi\mathbb{Z}$, поскольку сумма в левой части соответствует тождественному преобразованию слоя. S^1-связность задается набором 1-форм θ_α таких, что $\theta_\beta = \theta_\alpha - du_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что 2-форма $c_1 = -\frac{d\theta_\alpha}{2\pi}$ не зависит от тривиализации.

Разобьем поверхность M на многоугольники D_α и будем считать, что U_α является некоторой окрестностью D_α. Обозначим через Γ объединение всех ребер многоугольников D_α, и через X множество вершин. Ориентируем произвольным образом каждое ребро $\Gamma_{\alpha\beta}$. Тогда по формуле Стокса

$$\int\limits_M c_1 = \frac{-1}{2\pi}\sum\int\limits_{D_\alpha} d\theta_\alpha = \frac{-1}{2\pi}\sum\int\limits_{\partial D_\alpha} \theta_\alpha = \frac{-1}{2\pi}\sum \pm \int\limits_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\theta_\alpha - \theta_b) = \frac{-1}{2\pi}\sum \pm \int\limits_{\Gamma_{\alpha\beta}} du_{\alpha\beta} \ ,$$

где знак $\pm$ определяется тем, согласована ли ориентация общего ребра $\Gamma_{\alpha\beta}$ многогранников D_α и D_β с ориентацией ∂D_α или ∂D_β соответственно. Пусть вершина $x \in X$ является общей для многогранников $D_{\alpha_1}, \cdots, D_{\alpha_k}$, занумерованных против часовой стрелки. Положим $\mathrm{ind}(x) = \frac{-1}{2\pi}(u_{\alpha_1\alpha_2} + \ldots + u_{\alpha_{k-1}\alpha_k} + u_{\alpha_k\alpha_1}) \in \mathbb{Z}$. Еще раз применив формулу Стокса, окончательно получаем

$$\int_M c_1 = \frac{-1}{2\pi}\sum \pm \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} du_{\alpha\beta} = \frac{-1}{2\pi}\sum \pm \int_{\partial\Gamma_{\alpha\beta}} u_{\alpha\beta} = \sum_{x\in X} \operatorname{ind}(x)\ . \qquad \square$$

Пусть E — двумерное векторное расслоение над двумерной поверхностью и s — некоторое его сечение. Пусть X — множество его особых точек (нулей). Нули сечения s локально задаются двумя уравнениями, поэтому в случае общего положения они расположены изолированно и X состоит из конечного числа точек. Определим индекс $\operatorname{ind}(x) \in \mathbb{Z}$ каждой особой точки $x \in X$ как число оборотов, совершаемых сечением s при обходе вокруг этой точки (в произвольной тривиализации в окрестности x).

Теорема. *Характеристическое число расслоения E равно сумме индексов особых точек любого сечения s общего положения,*

$$c_1(E) = \int_M c_1 = \sum_{x\in X} \operatorname{ind}(x)\ .$$

В случае, когда E — касательное расслоение, сечение — это векторное поле.

Теорема. *Характеристическое число касательного расслоения сферы с g ручками M_g равно ее эйлеровой характеристике*

$$c_1(M) = \int_{M_g} c_1 = \chi(M) = 2 - 2g =$$
$$\#\textit{граней} - \#\textit{ребер} + \#\textit{вершин} =$$
$$\textit{сумме индексов особых точек произвольного векторного поля}\ .$$

Задача 3. Докажите обе теоремы.

Приведем независимое поучительное доказательство первой из двух теорем. Будем считать, что расслоение комплексное и на нем задана некоторая комплексная связность ∇'. Кроме того, для сечения $u = fs$, где f — комплекснозначная функция на M, положим

$$\nabla'' u = df\cdot s \quad \text{т.е.} \quad \nabla''_\xi u = \xi f\cdot s\ .$$

Эта формула задает связность, корректно определенную только на дополнении множества X. В этой связности сечение s ковариантно постоянно ($f \equiv 0$), в частности, ее форма кривизны равна нулю.

Выберем функцию «шапочку» ρ на M, такую, что $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, ρ обращается в нуль вне некоторой маленькой окрестности $U = \bigcup U_i$ множества $X = \bigcup\{x_i\}$, и ρ равно 1 в некоторой еще меньшей окрестности множества X. Тогда

$$\nabla = \rho\nabla' + (1-\rho)\nabla''$$

является корректно определенной на всем M связность. Эта связность совпадает с ∇'' вне U, поэтому ее форма кривизны равна нулю вне U и

$$c_1(E) = \int_M c_1 = \frac{-1}{2\pi i}\int_M \omega = \frac{-1}{2\pi i}\sum\int_{U_i}\omega\ .$$

Выберем в U_i тривиализацию (то есть не обращающееся в ноль сечение e) и обозначим через $\theta, \theta', \theta''$ 1-формы связностей $\nabla, \nabla', \nabla''$ соответственно. Сечение s имеет вид $s = he$, где функция h обращается в ноль в точке x_i. Находим

$$\nabla'' e = \nabla'' h^{-1} s = dh^{-1}\, s = -\frac{dh}{h^2} s = -\frac{dh}{h} e\ ,$$

откуда $\theta'' = -dh/h = -d\ln h$. Поэтому

$$\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{U_i}\omega = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{U_i} d\theta = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_i}\theta = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_i}\rho\theta' + (1-\rho)\theta'' = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_i}\theta'' = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_i} d\ln h$$

Последний интеграл равен, как известно, приращению аргумента функции h при обходе вокруг x_i, умноженному на i, то есть $\int\limits_{\partial U_i} d\ln h = (2\pi i)\operatorname{ind}(x_i)$. □

Задача 4. Если E и F — комплексные линейные расслоения, то таковы же и E^*, $E\otimes_{\mathbb{C}}F$. Докажите, что $c_1(E^*) = -c_1(E)$; $c_1(E\otimes_{\mathbb{C}}F) = c_1(E)\cdot c_1(F)$.

Задача 5. Докажите, что если M — одномерная комплексная кривая, а расслоение и сечение голоморфны (что это значит?), то индекс всегда неотрицателен и равен кратности, т.е. если сечение задается локально функцией $h(z) = az^k + \ldots$, где $a \neq 0$, то $\operatorname{ind}(0) = k$.

Задача 6. Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ с однородными координатами $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$, τ — линейное тавтологическое расслоение. Найдите явный вид формы кривизны расслоения τ для связности, в которой единичный вектор переходит в ближайший единичный вектор в соседнем слое (относительно стандартной метрики в $\mathbb{C}^{n+1}$, в которой $||z||^2 = \sum |z_i|^2$).

Пусть $H = \tau^*$ — двойственное расслоение. Функция z_0 задает комплекснозначную функцию на пространстве расслоения τ, линейную на слоях, т.е. сечение расслоения H. Это сечение обращается в ноль в точности на гиперплоскости $z_0 = 0$. Расслоение H называется *расслоением гиперплоскости.*

Задача 7. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — гладкая комплексная кривая, заданная однородным уравнением степени d. Докажите, что $c_1(H)|_C = d$.

Задача 8. Докажите, что однородный многочлен f степени d от $n+1$ переменных задает сечение расслоения $H^{\otimes d}$ на $\mathbb{C}P^n$, которое обращается в ноль в точности на гиперповерхности $f = 0$.

Задача 9. Выведите из предыдущей задачи теорему Безу: система уравнений $f = g = 0$, где f и g — однородные многочлены от трех переменных степеней d_1 и d_2 соответственно имеет $d_1 d_2$ решений в $\mathbb{C}P^2$ с учетом кратностей.

В качестве примера использования инварианта c_1 покажем вывод *формулы Римана-Гурвица* $g = (d-1)(d-2)/2$, выражающей род комплексной кривой в $\mathbb{C}P^2$ через ее степень.

Задача 10. Пусть на двумерном многообразии заданы комплексное расслоение и его подрасслоение $F \subset E$. Докажите, что $\Lambda^{\max}E \cong \Lambda^{\max}F\otimes\Lambda^{\max}E/F$, и значит, $c_1(\Lambda^{\max}E) = c_1(\Lambda^{\max}F) + c_1(\Lambda^{\max}E/F)$.

Задача 11. Рассмотрим точку $l \in \mathbb{C}P^n$ как комплексную прямую $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Докажите равенства а) $T_l\mathbb{C}P^n \cong \mathrm{Hom}(l, \mathbb{C}^{n+1}/l)$; б) $T\mathbb{C}P^n \oplus \mathbb{C} \cong H^{n+1}$; в) $\Lambda^n T\mathbb{C}P^n \cong H^{\otimes(n+1)}$.

Задача 12. Пусть $C \subset \mathbb{C}P^2$ — гладкая комплексная кривая. Докажите а) $c_1(\Lambda^2 T_C\mathbb{C}P^2) = c_1(TC) + c_1(N)$, где $N = T_C\mathbb{C}P^2/TC$ — нормальное расслоение; б) $c_1(N) =$ *индекс самопересечения* $(C, C) = d^2$.

Из предыдущих задач вытекает равенство $2 - 2g = \chi(C) = c_1(TC) = 3d - d^2$, откуда и следует формула Римана-Гурвица. $\square$

Задача 13. Дайте прямое комбинаторно-топологическое доказательство формулы Римана-Гурвица.

Задачи для зачета

Обязательные задачи (на зачете показать решение)

Задача 1. Поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана вращением вокруг оси Oz кривой

$$\begin{cases} x = A + B\cos t \\ z = B\sin t \end{cases}, \qquad 0 \leqslant t < 2\pi ,$$

A	5	3	6	9	21	8	16	45	15
B	4	1	3	6	4	1	2	4	1

а) найдите первую и вторую квадратичные формы в координатах (t, φ) (φ — угловой параметр);

б) определите главные кривизны k_1, k_2 и гауссову кривизну K; области эллиптичности, гиперболичности и параболическую линию;

в) определите форму объема dV. Найдите площадь поверхности S, а также интеграл $\int\limits_S K dV$.

г) определите связность Леви-Чивиты (матрицу связности, символы Кристоффеля или формулы для ковариантного дифференцирования — по выбору);

д) напишите условие ковариантной постоянности векторного поля вдоль кривой $t = t_0$;

е) найдите угол, на который поворачивается касательная плоскость при обходе вдоль кривой $t = t_0$;

ж) напишите дифференциальное уравнение для геодезических;

з) найдите все геодезические вида $t = \mathrm{const}$;

и) для каждой геодезической предыдущего пункта определите сопряженные точки.

Дополнительные задачи (быть готовым решить их на зачете)

Задача 2. Найдите кривизну и кручение кривых

а) $(t^3 + t, t^3 - t, \sqrt{3}t^2)$;

б) $3x^2 + 15y^2 = 1$, $z = xy$.

Задача 3. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ и u_1, u_2 — ортонормированная пара векторных полей на M, и θ — 1-форма, заданная соотношением $[u_1, u_2] = -\theta(u_1)u_1 - \theta(u_2)u_2$. Докажите, что связность на M, определяемая равенствами $\nabla_\xi u_1 = \theta(\xi)u_2$, $\nabla_\xi u_2 = -\theta(\xi)u_1$, не зависит от выбора полей u_1, u_2.

Задача 4. Найдите гауссову кривизну метрики $A(x,y)^2dx^2 + B(x,y)^2dy^2$, $A > 0$, $B > 0$.

Задача 5. Опишите тривиализации и функции перехода на касательном TM и кокасательном T^*M расслоениях.

Задача 6. Докажите изоморфизм $TG_{k,n} \cong \mathrm{Hom}(\tau, \nu) = \tau^* \otimes \nu$, где τ и ν — тавтологические расслоения.

Задача 7. Докажите, что линейное преобразование слоя E_x, задаваемое параллельным обносом по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$, имеет вид $\mathrm{id} - \varepsilon^2 R(\xi, \eta) + o(\varepsilon^2)$.

Задача 8. Пусть $\sigma\colon T^{*\otimes 2}M \to T^{*\otimes 2}M$ — операция перестановки множителей. Докажите, что операция $\nabla^-\omega = \sigma\nabla\omega + d\omega$ является связностью.

Задача 9. Докажите формулу для связности Леви-Чивиты

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j,\xi_i)=\frac{1}{2}\Big(\xi_k(\xi_i,\xi_j)-\xi_i(\xi_j,\xi_k)+\xi_j(\xi_i,\xi_k)-([\xi_j,\xi_k],\xi_i)+([\xi_i,\xi_k],\xi_j)+([\xi_i,\xi_j],\xi_k)\Big)\ .$$

Задача 10. Докажите равенство $R_{ijkl}=R_{klij}$ для тензора кривизны римановой метрики.

Задача 11. Найдите размерность пространства тензоров кривизны при $n=2;3;4;$ произвольном n.

Задача 12. Докажите, что при $n=3$ тензор кривизны полностью определяется тензором Риччи.

Задача 13. Приведите пример нетривиального S^1-расслоения над двумерным тором $\mathbb{T}^2$.

ЭКЗАМЕН
по курсу геометрии
2-й курс 4-семестр 10 мая 1998 года

Задача 1. Пусть заданы векторное расслоение $E \to M$, связность ∇ на нем и два векторных поля ξ, η на M. Как связаны между собой операторы кривизны $R(\xi,\eta)\colon E_x \to E_x$ связности ∇ и $R^*(\xi,\eta)\colon E_x^* \to E_x^*$ сопряженной связности ∇^*?

Задача 2. Замкнутая выпуклая плоская кривая $C \subset \mathbb{R}^2$ имеет длину l.

а) Найдите длину кривой C_s, находящейся снаружи области, ограниченной кривой C и отстоящей от нее на расстоянии s.

б) Найдите площадь полосы, ограниченной кривыми C и C_s.

Задача 3. Пусть $r \subset \mathbb{R}^3$ — пространственная кривая, S — объединение ее касательных.

а) Докажите, что гауссова кривизна поверхности S в точках ее гладкости равна нулю.

б) Найдите на S евклидовы координаты для случая, когда r — винтовая кривая $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Задача 4. а) Пусть на римановом многообразии M зафиксирована дифференциальная 1-форма α. Докажите, что на M существует единственная симметричная связность, такая что для произвольной ортонормированной системы векторных полей $\{u_i\}$ выполняется

$$(\nabla_{u_k} u_i, u_j) + (u_i, \nabla_{u_k} u_j) = \alpha(u_i)\alpha(u_j)\alpha(u_k)\ .$$

б) В условиях пункта а) вычислите $(\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v)$ для произвольных полей ξ, u, v.

Задача 5. Пусть M — единичная сфера в (вещественно) трехмерном пространстве комплексных эрмитовых ($u^{\mathrm{t}} = \overline{u}$) 2×2 матриц со следом 0. Рассмотрим на M тривиальное расслоение $\mathbb{C}^2$ и в нем подрасслоения $E_1 \to M$, $E_2 \to M$, состоящие из собственных векторов. Определите числа Чженя $c_1(E_1)$ и $c_1(E_2)$.

Решение экзаменационных задач

Задача 1. Ответ: оператор $R^*(\xi,\eta)$ сопряжен оператору $-R(\xi,\eta)$.

Решение. В произвольной тривиализации $R = d\theta + \theta\wedge\theta$, $\theta^* = -\theta^\top$, $R^* = d\theta^* + \theta^*\wedge\theta^* = -dh^\top + \theta^\top\wedge\theta^\top = -R^\top$.

Задача 2. Ответ: а) $L = l + 2\pi s$, б) $S = ls + \pi s^2$.

Решение. Пусть t — натуральный параметр, v, n — единичные касательный и нормальный векторы. Тогда $\dot v = kn$, $\dot n = -kv$, где $k(t)$ — кривизна. Выражение $r(t) - sn(t)$ задает новые координаты в окрестности кривой, в которых C_s задается уравнением $s = \mathrm{const}$. Евклидова метрика в координатах t, s принимает вид $g_{11} = (\dot r - s\dot n, \dot r - s\dot n) = (1+ks)^2$, $g_{12} = g_{21} = (\dot r - s\dot n, -n) = 0$, $g_{22} = (-n,-n) = 1$, т.е. $g = (1+ks)^2dt^2 + ds^2$. Теперь мы можем считать длины и площади, забыв о существовании евклидовых координат:

$$L = \int\limits_{s=\mathrm{const}} (1+ks)\,dt = l + s\int\limits_C k\,dt; \qquad S = \iint\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant s} (1+k\sigma)d\sigma\,dt = ls + \frac{s^2}{2}\int\limits_C k\,dt.$$

Осталось заметить, что k — скорость вращения касательной, поэтому $\int k\,dt = 2\pi$, полное приращение угла наклона касательной при обходе вдоль C.

Задача 3. Решение. а) Аналогично решению предыдущей задачи, введем на S координаты при помощи параметризации $r(\tau) + sv(\tau)$, где τ — натуральный параметр. В этих координатах метрика на S имеет вид $g_{11} = (\dot r + s\dot v, \dot r + s\dot v) = 1 + s^2k^2$, $g_{12} = g_{21} = (\dot r + s\dot v, v) = 1$, $g_{22} = (v,v) = 1$, т.е. $g = (1+s^2k^2)\,d\tau^2 + 2d\tau\,ds + ds^2$.

Метрика на S полностью определяется функцией $k(\tau)$. Поэтому для любой другой кривой с той же зависимостью $k(\tau)$ кривизна получившейся поверхности будет той же. В частности, можно взять плоскую кривую, для которой поверхность является частью плоскости, и значит, $K \equiv 0$.

б) Для винтовой кривой $k = \frac{|[\dot r,\ddot r]|}{(\dot r,\dot r)^{3/2}} = \frac12$. Поэтому метрика на S будет такой же, как у окружности радиуса 2. Получаем евклидовы координаты

$$x = 2\cos(\tau/2) - s\sin(\tau/2), \quad y = 2\sin(\tau/2) + s\cos(\tau/2),$$

где $\tau = \sqrt2\,t$, а t — исходный параметр на кривой.

Проверка: $dx = (-\sin(\tau/2) - \frac{s}{2}\cos(\tau/2))\,d\tau - \sin(\tau/2)\,ds$, $dy = (\cos(\tau/2) - \frac{s}{2}\sin(\tau/2))\,d\tau + \cos(\tau/2)\,ds$. Отсюда $dx^2 + dy^2 = (1 + \frac{s^2}{4})\,d\tau^2 + 2d\tau\,ds + ds^2$.

Задача 4. а) Разность двух связностей является тензором! Поэтому *всякая* связность ∇ однозначно задается соотношением

$$(\nabla_\xi u, v) = (\nabla^{\mathrm{LC}}_\xi u, v) + T(u,v,\xi),$$

где функция T линейно зависит от векторных полей u, v, ξ, а ∇^{LC} — произвольная фиксированная связность, в качестве которой можно взять связность Леви-Чивиты. Условие симметричности ∇ накладывает на числа $T(u_i,u_j,u_k)$ соотношения вида $T(u_i,u_j,u_k) = T(u_i,u_k,u_j)$, а второе условие дополнительные соотношения $T(u_i,u_j,u_k) + T(u_j,u_i,u_k) = \alpha(u_i)\alpha(u_j)\alpha(u_k)$. Эти соотношения приводят к однозначному выражению $T(u_i,u_j,u_k) = \frac12\alpha(u_i)\alpha(u_j)\alpha(u_k)$, которое, очевидно, не зависит от выбора базиса и по линейности однозначно продолжается до тензора $T = \frac{1}{2}\alpha\otimes\alpha\otimes\alpha$. Итак, искомая связность ∇ задается равенством

$$(\nabla_\xi u, v) = (\nabla^{\mathrm{LC}}_\xi u, v) + \frac{1}{2}\alpha(\xi)\alpha(u)\alpha(v).$$

б) Из приведенного равенства, $(\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v) = \xi(u, v) + \alpha(u)\alpha(v)\alpha(\xi)$.

Задача 5. Ответ: $c_1(E_1) = -c_1(E_2) = \pm 1$ в зависимости от выбора ориентации на M.

Решение. Эрмитова матрица со следом 0 имеет вид $\begin{pmatrix} a & b-ic \\ b+ic & -a \end{pmatrix}$. Ее определитель равен $-(a^2+b^2+c^2)$, поэтому матрицы из M имеют собственные числа ± 1, а собственные векторы (эрмитово) ортогональны. И обратно, всякая матрица с собственными числами ± 1 и ортогональными собственными векторами лежит в M. Поскольку каждая такая матрица однозначно определяется направлением первого собственного вектора, многообразие M отождествляется с множеством $\mathbb{C}P^1$ комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, а расслоение E^1 есть тавтологическое расслоение (слоем которого над точкой $l \in \mathbb{C}P^1$ служит сама прямая $l \cong \mathbb{C}$) Хопфа, характеристическое число которого равно -1 (при выборе ориентации на $\mathbb{C}P^1$, задаваемой комплексной структурой). Второе расслоение E_2 также является расслоением Хопфа, однако отображение $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, сопоставляющее прямой ее ортогональное дополнение, обращает ориентацию, поэтому $c_1(E_2) = 1$.

Альтернативные способы решения некоторых задач

II способ (бескоординатный) решения задачи 1. Пусть u и s — сечения расслоений E и E^* соответственно. По определению,

$$\begin{aligned}
(\nabla^*_\xi u)(s) &= \xi u(s) - u(\nabla_\xi s),\\
(\nabla^*_\eta \nabla^*_\xi u)(s) &= \eta\xi u(s) - \xi u(\nabla_\eta s) - \eta u(\nabla_\xi s) + u(\nabla_\xi \nabla_\eta s).\\
\text{Аналогично, } (\nabla^*_\xi \nabla^*_\eta u)(s) &= \xi\eta u(s) - \eta u(\nabla_\xi s) - \xi u(\nabla_\eta s) + u(\nabla_\eta \nabla_\xi s),\\
(\nabla^*_{[\xi,\eta]} u)(s) &= \xi\eta u(s) - \eta\xi u(s) - u(\nabla_{[\xi,\eta]} s),\\
\text{откуда } (R^*(\xi,\eta)u)(s) &= (\nabla^*_\xi \nabla^*_\eta u)(s) - (\nabla^*_\eta \nabla^*_\xi (u)(s) - (\nabla^*_{[\xi,\eta]} u)(s) =\\
&\quad u(\nabla_\eta \nabla_\xi s - \nabla_\xi \nabla_\eta s + \nabla_{[\xi,\eta]} s) = -u(R(\xi,\eta)s).
\end{aligned}$$

II способ (прямой) решения задачи 3. Исходя из вида метрики $g = (1+s^2k^2)\,d\tau^2 + 2d\tau\,ds + ds^2$ нужно определить связность, написать уравнения ковариантно постоянных 1-форм, найти базис таких форм (их существование равносильно условию $K \equiv 0$), убедиться, что они замкнуты и найти первообразные (для п. а проще всего, конечно, убедться в вырожденности II квадратичной формы). Вычисления можно проводить как на языке векторных расслоений, так и на языке S^1-расслоений, и тот и другой способ обсуждался на семинаре.

Вычисления на языке S^1-расслоений.

а) Приведем метрику к сумме квадратов: $g = (ks\,d\tau)^2 + (d\tau + ds)^2$. Отсюда вытекает, что базис из 1-форм $u_1 = ks\,d\tau$, $u_2 = d\tau + ds$ — ортонормированный. Двойственный базис векторных полей: $e_1 = \frac{1}{ks}(\partial_\tau - \partial_s)$, $e_2 = \partial_s$. Находим коммутатор $[e_1, e_2] = \frac{1}{ks^2}(\partial_\tau - \partial_s) = \frac{1}{s}e_1$. Значит, $\theta = -\frac{1}{s}u_1 = -k\,d\tau$, $\omega = d\theta = 0$, и следовательно, гауссова кривизна равна нулю.

б) Пусть $k = 1/2$ (как для винтовой кривой). Общее (ко)векторное поле единичной длины имеет вид $e = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$ ($u = \cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2$), где $\varphi = \varphi(\tau, s)$ — произвольная функция. Условие ковариантной постоянности имеет вид

$$d\varphi + \theta = 0, \quad \text{т.е. } d\varphi = \tfrac{1}{2}d\tau, \text{ или } \varphi = \tfrac{\tau}{2} + \text{const}.$$

Отсюда находим две ортогональных ($\text{const} = 0, \frac{\pi}{2}$) ковариантно постоянных 1-формы

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\tau}{2}u_1 + \sin\tfrac{\tau}{2}u_2 &= (\tfrac{s}{2}\cos\tfrac{\tau}{2} + \sin\tfrac{\tau}{2})\,d\tau + \sin\tfrac{\tau}{2}\,ds = d(s\sin\tfrac{\tau}{2} - 2\cos\tfrac{\tau}{2}),\\
-\sin\tfrac{\tau}{2}u_1 + \cos\tfrac{\tau}{2}u_2 &= (-\tfrac{s}{2}\sin\tfrac{\tau}{2} + \cos\tfrac{\tau}{2})\,d\tau + \cos\tfrac{\tau}{2}\,ds = d(s\cos\tfrac{\tau}{2} + 2\sin\tfrac{\tau}{2}).
\end{aligned} \qquad (*)$$

Полученные евклидовы координаты $x = s\sin\frac{\tau}{2} - 2\cos\frac{\tau}{2}$, $y = s\cos\frac{\tau}{2} + 2\sin\frac{\tau}{2}$ отличаются от вычисленных первым способом только знаком.

Вычисления на языке векторных расслоений ($k = 1/4$).

$$\begin{aligned}
g &= \begin{pmatrix} 1+s^2/4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \frac{4}{s^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1+s^2/4 \end{pmatrix},\\
g\theta &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} dg_{11} & \frac{\partial g_{11}}{\partial s}\,d\tau \\ -\frac{\partial g_{11}}{\partial s}\,d\tau & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\,ds/4 & s\,d\tau/4 \\ -s\,d\tau/4 & 0 \end{pmatrix},\\
\theta &= g^{-1}g\theta = \begin{pmatrix} (ds+d\tau)/s & d\tau/s \\ -(ds+d\tau)/s - s\,d\tau/4 & -d\tau/s \end{pmatrix},\\
-\theta^* &= \theta^\top = \begin{pmatrix} (ds+d\tau)/s & -(ds+d\tau)/s - s\,d\tau/4 \\ d\tau/s & -d\tau/s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Уравнение ковариантной постоянности для 1-формы $u = u_1\,d\tau + u_2\,ds$ имеет вид $\binom{du_1}{du_2} = -\theta^*\binom{u_1}{u_2}$, или

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial s} = (u_1 - u_2)/s \\ \frac{\partial u_2}{\partial s} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = (u_1 - u_2)/s - su_2/4 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = (u_1 - u_2)/s \end{cases}$$

Из первой системы определяем $u_2 = B(t)$, и $d(u_1 - u_2)/(u_1 - u_2) = ds/s$, т.е. $u_1 - u_2 = A(t)s$, $u_1 = A(t)s + B(t)$. Из второй системы находим для функций A, B дифференциальные уравнения $B' = A$, $A' = -B/4$. Решая их, находим те же решения $(*)$, что получены выше.

II способ решения задачи 5. Всякий собственный вектор с собственным значением 1 пропорционален векторам $s_1 = \binom{1+a}{b+ic}$ и $s_2 = \binom{b-ic}{1-a} = fs_1$, где $f = \frac{b-ic}{1+a} = \frac{1-a}{b+ic}$. Вектор s_2 задает глобальное сечение расслоения E_1, которое обращается в ноль только в точке $(a,b,c) = (0,0,1)$, а в окрестности этой точки в тривиализации, определяемой сечением s_1, задается функцией $f = \frac{b-ic}{a+1}$, которая обходит один раз вокруг нуля в отрицательном направлении, когда точка на сфере обходит вокруг точки $(0,0,1)$. Поэтому индекс нуля сечения равен -1 и $c_1(E_1) = -1$. Аналогично вычисляется $c_1(E_2) = 1$.

III способ решения задачи 5. Мы можем вычислять $c_1(E_1)$, интегрируя форму кривизны некоторой связности. Связность можно выбирать произвольно. Рассмотрим комплексную связность, которая задается покоординатным дифференцированием в $\mathbb{C}^2$ с последующим ортогональным проектированием на E_1. Вычислим вид этой связности и ее формы кривизны в тривиализации расслоения E_1, определяемой сечением $u = \binom{1}{x+iy}$, где $x = \frac{b}{1+a}$, $y = \frac{c}{1+a}$. Тогда при нашем выборе связности $\nabla u = \frac{\langle du, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$, с другой стороны, по определению 1-формы комплексной связности, $\nabla u = \theta u$. Поэтому

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\langle du, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{(x-iy)(dx+idy)}{1+x^2+y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{1+x^2+y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{1+x^2+y^2} i, \\ d\theta &= \frac{2(1+x^2+y^2)\,dx\wedge dy - 2(x\,dx + y\,dy)\wedge(x\,dy - y\,dx)}{(1+x^2+y^2)^2} i = \frac{2i\,dx\wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Координаты x, y покрывают всю сферу M кроме одной точки $(0,0,-1)$, поэтому

$$c_1(E_1) = \int\limits_M c_1 = \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\theta = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(1+\rho^2)^2} = \frac{1}{1+\rho^2}\Big|_0^\infty = -1.$$

Равенство $c_1(E_2) = 1$ получается аналогично.