Задачи к курсу «Геометрия дифференциальных уравнений» Московский независимый университет, февраль – апрель 1998

И.С. Красильщик

Задача 1 Пусть N — гладкое многообразие и $0 \le m \le \dim N$. *k-джетом подмногообразия* $M \subset N, \dim M = m$, в точке $x \in M$ называется множество $[M]_x^k$ подмногообразий M', касающихся M в точке x с порядком k. Множество k-джетов m-мерных подмногообразий обозначается $J^k(N, m)$. Доказать, что

(a) $J^k(N, m)$ — гладкое многообразие;

(b) естественные отображения $J^k(N, m) \to J^l(N, m), k \ge l$, и $J^k(N, m) \to N$ суть гладкие сюръекции;

(c) $J^k(N, m)$ локально диффеоморфно многообразию $J^k(\pi)$.

Задача 2 Определить распределение Картана на $J^k(N, m)$. Сформулировать и доказать теорему Ли – Беклунда для этих многообразий.

Задача 3 Скажем, что два многообразия X и X' с распределениями $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ соответственно *локально изоморфны*, если существует локальный диффеоморфизм $X \supset \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathcal{U}' \subset X'$, для которого $f_*(\mathcal{D}_x) = \mathcal{D}'_{f(x)}, x \in \mathcal{U}$. Когда многообразия $J^k(\pi)$ и $J^{k'}(\pi')$ локально изоморфны, если в качестве распределений взять распределения Картана?

Задача 4 Доказать, что расслоения $\pi_{k,k-1} : J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$ несут естественную аффинную структуру, если (a) $\dim \pi > 1$ и $k \ge 1$ или (b) $\dim \pi = 1$ и $k > 1$. Описать слои этих расслоений.

Задача 5 Какова естественная структура расслоений $J^k(N, m) \to J^{k-1}(N, m)$?

Задача 6 Пусть $\pi : E \to M, \pi' : E' \to M'$ — гладкие векторные расслоения и $\varphi : M' \to M$ — гладкое отображение.

(a) Определить понятие нелинейного дифференциального оператора $\Delta : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ *над отображением* φ.

(b) Доказать, что если $\pi'' : E'' \to M''$ — гладкое векторное расслоение, $\varphi' : M'' \to M'$ — гладкое отображение и $\Delta : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi'), \Delta' : \Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ — нелинейные операторы порядков k и k' над отображениями φ и φ' соответственно, то $\Delta' \circ \Delta$ — оператор порядка $k + k'$ над $\varphi' \circ \varphi$.

⋆ ⋆ ⋆

Задача 7 Пусть $x \in S^1$ — точка окружности и $\mu_x \subset C^\infty(S^1)$ — идеал функций, обращающихся в нуль в точке x.

(a) Доказать, что μ_x — проективный $C^\infty(S^1)$-модуль.

(b) Описать векторное расслоение над S^1, соответствующее этому модулю.

Задача 8 Построить пример коммутативной алгебры с единицей, дифференциальные операторы над которой не порождаются операторами порядков 0 и 1.

Задача 9 Пусть $A = \mathbf{Z}_p[x]/(x^n), n, p \in \mathbf{Z}_+$. Описать алгебру дифференциальных операторов $A \to A$.

Задача 10 Доказать, что в алгебре непрерывных функций на прямой не существует линейных дифференциальных операторов порядка > 0.

Задача 11 Пусть A — коммутативная K-алгебра с единицей и P — A-модуль. *Модуль k-джетов* $\mathcal{J}^k(P)$ модуля P определяется следующим образом. В тензорном произведении $A \otimes_K P$ вводится естественная структура A-модуля: $a(b \otimes p) = (ab) \otimes p$. Для каждого $a \in A$ определяется оператор $\delta^a : A \otimes_K P \to A \otimes_K P$, $\delta^a(b \otimes p) = ab \otimes p - b \otimes ap$. Тогда $\mathcal{J}^k(P) = (A \otimes_K P)/\mu_k$, где μ_k — подмодуль в $A \otimes_K P$, порожденный всеми элементами вида $(\delta^{a_0} \circ \ldots \circ \delta^{a_k})(b \otimes p), a_0, \ldots, a_k, b \in A, p \in P$. Определено естественное отображение $j_k : P \to \mathcal{J}^k(P), j_k(p) = 1 \otimes p \bmod \mu_k$.

(a) Доказать, что j_k — линейный дифференциальный оператор порядка $\le k$.

(b) Доказать, что любой линейный дифференциальный оператор $\Delta \in \mathrm{Diff}(P, Q)$, где Q — A-модуль, единственным образом представляется в виде $\Delta = \varphi_\Delta \circ j_k$ и, таким образом, имеет место естественный изоморфизм $\mathrm{Diff}(P, Q) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{J}^k(P), Q)$.

Задача 12 Если в задаче 11 положить $P = A, k = 1$, то соответствие $i : a \mapsto a \otimes 1 \bmod \mu_1$ определит гомоморфизм A-модулей $i : A \to \mathcal{J}^1(A)$. Фактормодуль $\Lambda^1(A) = \mathcal{J}^1(A)/\mathrm{im}\, i$ называется *модулем 1-форм* алгебры A. Определим отображение $d : A \to \Lambda^1(A)$ как композицию оператора $j_1 : A \to \mathcal{J}^1(A)$ и естественной проекции $\mathcal{J}^1(A) \to \Lambda^1(A)$.

(a) Доказать, что d — дифференцирование алгебры A со значениями в A-модуле $\Lambda^1(A)$.

(b) Доказать, что любое дифференцирование $\Delta \in \mathrm{D}(Q)$, где Q — A-модуль, единственным образом представляется в виде $\Delta = \psi_\Delta \circ d$ и, таким образом, имеет место естественный изоморфизм $\mathrm{D}(Q) = \mathrm{Hom}_A(\Lambda^1(A), Q)$.

Задача 13 Доказать, что если A — алгебра над полем рациональных чисел, а $\Lambda^1(A)$ и P — проективные модули конечного типа, то и $\mathcal{J}^k(P)$ — проективный модуль конечного типа для всех $k \geq 0$.

Задача 14 Описать модули $\Lambda^1(A)$ и $\mathcal{J}^k(A)$ для алгебры A из задачи 9.

Задача 15 Пусть $A = C^\infty(M)$, где M — гладкое многообразие и P — A-модуль. Положим $\mathcal{G}(P) = P/(\cap_{x\in M}\mu_x)$, где μ_x — идеал точки x. Модуль $\mathcal{G}(P)$ называется *геометризацией* модуля P.

(a) Доказать, что $\mathcal{G}(\Lambda^1(A))$ (задача 12) совпадает с модулем 1-форм многообразия M.

(b) Пусть $P = \Gamma(\pi)$ — модуль гладких сечений векторного расслоения $\pi : E \to M$. Доказать, что $\mathcal{G}(\mathcal{J}^k(P))$ (задача 11) совпадает с модулем сечений расслоения k-джетов $\pi_k : J^k(\pi) \to M$.

$\star \quad \star \quad \star$

Задача 16 Построить пример уравнения, алгебра Ли симметрий которого тривиальна.

Задача 17 Пусть $\Delta : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ — нелинейный оператор и $\Phi_\Delta : J^\infty(\pi) \to J^\infty(\xi)$ — определяемый им морфизм расслоений π_∞ и ξ_∞.

(a) Доказать что Φ_Δ переводит распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ в распределение Картана на $J^\infty(\xi)$.

(b) При каких условиях $\Phi_\Delta(J^\infty(\pi)\subset J^\infty(\xi)$ является бесконечно продолженным уравнением?

(c) Какие преобразования (поля) Ли опускаются с $J^\infty(\pi)$ в $J^\infty(\xi)$?

(d) Какие преобразования (поля) Ли поднимаются с $J^\infty(\xi)$ на $J^\infty(\pi)$?

Задача 18 Над каждой точкой $x \in M$ в слое прямого произведения $M \times \mathbf{R}^m$ задано линейное подпространство $L_x, \dim L_x = n = \mathrm{const}$. Доказать, что семейство $\{L_x\}_{x\in M}$ является векторным расслоением тогда и только тогда, когда отображение $L : M \to G_{m,n}, x \mapsto L_x$, гладкое.

Задача 19 Пусть $\psi : J^k(\pi) \to J^{k+1}(\pi)$ — сечение расслоения $\pi_{k+1,k}$. График G_ψ этого сечения является уравнением порядка $k+1$.

(a) Описать бесконечное продолжение этого уравнения.

(b) Описать его внутренние и внешние симметрии.

Задача 20 Всякое ψ из задачи 19 задает горизонтальное распределение $\mathcal{D}_\psi$ на $J^k(\pi)$: $\mathcal{D}_\psi : \theta \mapsto L_{\psi(\theta)}$. Значит, условие интегрируемости распределения $\mathcal{D}_\psi$ — это (нелинейное) уравнение $\mathcal{I}$ в расслоении $\pi_{k+1,k}$.

(a) Является ли $\mathcal{I}$ формально интегрируемым?

(b) Вычислить алгебру Ли симметрий уравнения $\mathcal{I}$.

Задача 21 Пусть $F : J^\infty(\pi) \to J^\infty(\pi)$ — преобразование Ли и $Э_\varphi$ — эволюционное дифференцирование на $J^\infty(\pi)$. Вывести формулы преобразования производящего сечения φ при действии F.

Задача 22 Пусть $\pi : \mathbf{R} \times M \to M$ — тривиальное одномерное расслоение и $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$ — уравнение первого порядка. Рассмотрим форму Картана $\omega \in \Lambda^1(J^1(\pi))$ и положим $\Omega = d\omega\,|_{\mathcal{E}}$. Тогда 2-форма Ω (почти всюду) определяет на $\mathcal{E}$ *симплектическую структуру*. Исследовать связь между симметриями этой структуры и симметриями (внешними и внутренними) уравнения $\mathcal{E}$.

Задача 23 Пусть $\mathcal{E}$ — такое же уравнение: как и в задаче 22. Предположим, что $\mathcal{E}$ задано оператором $f \in C^\infty(J^1(\pi))$.

(a) Доказать, что контактное поле X_f является симметрией уравнения $\mathcal{E}$.

$(n-1)$-мерное интегральное многообразие распределения Картана на $\mathcal{E}$ называется *данными Коши* для уравнения $\mathcal{E}$. Данные Коши называются *нехарактеристическими*, если они трансверсальны полю X_f (см. п. (a)).

(b) Доказать, что задача Коши разрешима для нехарактеристических данных Коши, т.е. существует максимальное n-мерное интегральное многообразие распределения Картана, содержащее данные Коши.

$\star \quad \star \quad \star$

Задача 24 Пусть $U_1 : \mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ — дифференцирование, определяемое связностью Картана в расслоении π_∞. Оно однозначно продолжается до комплекса $d_{\mathcal{C}} : \Lambda^i(\pi) \to \Lambda^{i+1}(\pi)$, если потребовать (1) $d_{\mathcal{C}} \circ d = -d \circ d_{\mathcal{C}}$ и (2) $d_{\mathcal{C}}(\omega \wedge \theta) = d_{\mathcal{C}}(\omega) \wedge \theta + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge d_{\mathcal{C}}(\theta)$. Положим $\bar{d} = d - d_{\mathcal{C}}$.

(a) Доказать, что ограничение $\bar{d}$ на $\bar{\Lambda}^i(\pi)$ совпадает с горизонтальным дифференциалом де Рама.

(b) Доказать, что $\bar{d} \circ d_{\mathcal{C}} = d_{\mathcal{C}} \circ \bar{d}$.

Задача 25 В силу задачи 24 имеет место разложение в прямую сумму модулей $\Lambda^i(\pi) = \oplus_{p+q=i} \bar{\Lambda}^q(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}\Lambda^p(\pi)$, где $\mathcal{C}\Lambda^p(\pi)$ — подмодуль в $\Lambda^p(\pi)$, порожденный формами вида $d_{\mathcal{C}}(f_1) \wedge \ldots \wedge d_{\mathcal{C}}(f_p)$, $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{F}(\pi)$.

(a) Доказать, что

$$\bar{d}(\bar{\Lambda}^q(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}\Lambda^p(\pi)) \subset \bar{\Lambda}^{q+1}(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}\Lambda^p(\pi),$$

$$d_{\mathcal{C}}(\bar{\Lambda}^q(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}\Lambda^p(\pi)) \subset \bar{\Lambda}^q(\pi) \otimes_{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{C}\Lambda^{p+1}(\pi).$$

(b) Доказать, что композиция оператора $d_{\mathcal{C}} : \bar{\Lambda}^n(\pi) \to \bar{\Lambda}^n(\pi) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\pi)$ с естественной проекцией $\bar{\Lambda}^n(\pi) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\pi) \to \bar{\Lambda}^n(\pi) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\pi) / \bar{d}(\bar{\Lambda}^{n-1}(\pi) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\pi))$ — это оператор Эйлера, $n = \dim M$.

Задача 26 Доказать, что первая группа $\bar{H}^1(\mathcal{E})$ горизонтальных когомологий де Рама уравнения Кортевега–де Фриза $u_t = u_{xxx} + uu_x$ бесконечномерна как векторное пространство над $\mathbf{R}$.

$\star \quad \star \quad \star$

Решения последних двух задач мне не известны.

Задача 27 Объясните или опровергните следующий экспериментальный факт: не существует дифференциальных уравнений, обладающих конечным набором высших (не классических) симметрий.

Задача 28 Объясните следующий или опровергните экспериментальный факт: если уравнение обладает бесконечными наборами и высших, и классических симметрий, то оно линейно.