Лекция 1

С. С. Анисов*

14 февраля 1998 г.

Краткое содержание

В этой лекции разобрано несколько конкретных топологических задач. Определено число вращения векторного поля по замкнутому контуру на плоскости. Доказано существование неподвижной точки непрерывного отображения круга в себя (теорема Брауэра) и существование особой точки векторного поля на сфере (теорема о еже). Дано топологическое доказательство основной теоремы алгебры. Введено понятие узла и доказано, что трилистник не эквивалентен тривиальному узлу.

Мы начнем не с полного и всеобъемлющего ответа на вопрос “что такое топология”, а с нескольких конкретных примеров.

Пример 1

Теорема 1 (Брауэр) *Пусть $f : K \to K$ — непрерывное отображение круга K в себя. Тогда у отображения f существует неподвижная точка, т.е. такая точка x, что $f(x) = x$.*

Доказательство Сопоставим каждой точке ч круга K вектор $\mathbf{v}(x) = f(x) - x$ (т.е. зададим на K *векторное поле*). Иными словами, в каждой точке x приложен вектор с концом $f(x)$. Предположим, что у f нет неподвижных точек. Тогда векторное поле $\mathbf{v}$ не имеет в K особых точек , т. е. точек x, в которых $\mathbf{v}(x) = 0$.

Определим *индекс* (*число вращения*) $\mathrm{ind}_\gamma \mathbf{v}$ векторного поля $\mathbf{v}$ по ориентированному замкнутому контуру γ на плоскости, не содержащему особых точек поля. Для этого отметим на γ точку x_0 и заставим точку x пробегать контур γ в нужном направлении, начиная с x_0. При этом будем следить за *направлением* вектора $\mathbf{v}(x)$ в данный момент (направление определено, поскольку $\mathbf{v}(x) \neq 0$).

Когда точка x вернется в исходное положение x_0, вектор $\mathbf{v}(x)$ также придет в исходное положение. Таким образом, при движении точки x вдоль контура γ вектор сделает *целое число оборотов*. Это число и есть $\mathrm{ind}_g(\mathbf{v})$; оно считается положительным, если вектор в целом повернулся против часовой стрелки, и отрицательным, если по.

Задача Найдите индекс вращения векторного поля $\mathbf{v}(z) = z^n$, где $z \in \mathbb{C}$, по окружности $|z| = 1$, ориентированной против часовой стрелки.

Вернемся к доказательству теоремы. Предположим, что теорема неверна — поле $\mathbf{v}$ не имеет нулей. Рассмотрим семейство окружностей $\gamma(r)$ с центром O и радиусом r, $0 < r \leq 1$ (мы считаем, что K — круг единичного радиуса с центром O). Обозначим $n(r) = \mathrm{ind}_{\gamma(r)} \mathbf{v}$. Тогда $n(r)$ — непрерывная функция параметра r, определенная на всем полуинтервале $(0, 1]$. Поскольку всегда $n(r) \in \mathbb{Z}$, то отсюда следует, что $n(r) = const$.

При достаточно малых r на окружности $\gamma(r)$ все векторы $\mathbf{v}(x)$ имеют приблизительно одно и то же направление. Отсюда следует, что $n(r) = 0$ при таких r. Покажем, однако, что $n(1) = 1$ — полученное противоречие и будет доказательством теоремы.

Для доказательства рассмотрим поле $\mathbf{w}(x)$ на ∂K, направленное по внешней нормали к ∂K. Очевидно, $\mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{w} = 1$. Рассмотрим поле $\mathbf{u}_t(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1-t)\mathbf{v}(x) - t\mathbf{w}(x)$ при всех $t \in [0, 1]$. Поскольку направления $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{w}(x)$ различны при любом x, поле $\mathbf{u}_t(x)$ нигде на окружности ∂K не обращается в нуль. Это означает, что определено число $m(t) = \mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{u}_t$. $m(t)$ зависит от t непрерывно, и поэтому не зависит вовсе. Следовательно, $n(1) = \mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{v} = \mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{u}_0 = m(0) = m(1) = \mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{u}_1 = \mathrm{ind}_{\partial K} \mathbf{w} = 1$. ■

Пример 2

Рассмотрим двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и на ней — *касательное векторное поле* $\mathbf{v}$. Иными словами, сопоставим каждой точке $x \in S^2$ вектор $\mathbf{v}(x)$, касающийся сферы в точке x.

Теорема 2 (“о еже”) *Существует точка $x \in S^2$, в которой $\mathbf{v}(x) = 0$.*

*anisov@mccme.ru

Доказательство Предположим обратное. Рассмотрим некоторую точку $x_0 \in S^2$ ("северный полюс") и стереографическую проекцию сферы на плоскость из этой точки. При этом проектируются не только точки сферы x, но и приложенные в них вектора $\mathbf{v}(x)$. Таким образом, мы получим на плоскости векторное поле $\mathbf{w}$, не имеющее особых точек (нулей).

Нарисуем на сфере маленький контур γ, охватывающий северный полюс x_0. Его проекция на плоскость — очень большой контур Γ. На контуре γ вектор $\mathbf{v}(x)$ почти не меняется, откуда следует, что индекс его стереографической проекции $\mathbf{w}$ на контуре Γ равен 2 (нарисуйте !). Однако если внутри контура Γ поле $\mathbf{w}$ не имеет особых точек, то, рассуждая, как в доказательстве теоремы Брауэра, получим, что $\mathrm{ind}_\Gamma \mathbf{w} = 0$. Значит, особые точки у $\mathbf{w}$ — а, следовательно, и у $\mathbf{v}$ — имеются. ∎

Пример 3

Теорема 3 (основная теорема алгебры) *Всякий многочлен* $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ *имеет хотя бы один комплексный корень.*

Любопытно, что все известные доказательства "основной теоремы алгебры" используют так или иначе топологические (т.е. неалгебраические) соображения...

Доказательство Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ векторное поле $\mathbf{v}(z) = P(z)$ (комплексное число $P(z)$ мы рассматриваем как плоский вектор; обратите внимание, что здесь мы, в отличие от доказательства теоремы Брауэра, z не вычитаем). Предположим, что теорема неверна, и многочлен $P(z)$ — а, значит, и поле $\mathbf{v}$ — нулей не имеет. Тогда вращение этого векторного поля на любой окружности с центром в начале координат должно быть равно 0.

Покажем, однако, что на окружности $\gamma(R)$ достаточно большого радиуса R с центром в начале координат это вращение равно n. Для этого рассмотрим семейство векторных полей $\mathbf{u}_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0)$ для всех $t \in [0,1]$. *Если радиус R достаточно велик, то поля u_t не имеют на $\gamma(R)$ особых точек* (для этого достаточно взять $R > |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|$ — подумайте, почему). Поэтому всегда определено число $n(t) = \mathrm{ind}_{\gamma(r)} \mathbf{u}_t$. В силу уже известного нам рассуждения с непрерывностью $n(t)$ на самом деле от t не зависит. Поэтому $\mathrm{ind}_{\gamma(R)} \mathbf{v} = n(1) = n(0) = \mathrm{ind}_{\gamma(R)}(z^n) = n$ в силу задачи, приведенной выше. ∎

Пример 4

Узлом в $\mathbb{R}^3$ называется непрерывно дифференцируемое отображение $\kappa : S^1 \to \mathbb{R}^3$, обладающее двумя свойствами:

1. $\forall t \in S^1\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0$ (x, y, z — координаты в $\mathbb{R}^3$, $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$).

2. Образы различных точек $t \in S^1$ различны.

Первое условие обеспечивает "гладкость" образа в $\mathbb{R}^3$ (который в противном случае мог бы быть весьма неприятным), а второе условие означает отсутствие самопересечений. Два узла κ_0 и κ_1 называются *изотопными*, если существует семейство узлов κ_τ, $\tau \in [0,1]$ такое, что точка $\kappa_\tau(t) \in \mathbb{R}^3$ зависит от τ непрерывно при любом $t \in S^1$.

Диаграммой γ узла κ называется проекция его на плоскость, обладающая следующими свойствами:

1. γ — гладкая кривая (в том же смысле, что и выше).

2. γ имеет не более конечного числа точек самопересечения, причем в каждой из них пересекаются только две "ветви" кривой.

3. Касательные к двум "ветвям" в точке самопересечения не совпадают.

При рисовании диаграмм в каждой точке самопересечения указывают, какая из двух ветвей идет ниже — ее прерывают, а верхнюю оставляют непрерывной. Основой теории узлов является следующая теорема, которую мы доказывать не будем:

Теорема 4 (Рейдемейстер) *Для каждого узла существует диаграмма. Любые два узла с одной и той же диаграммой изотопны. Если κ_t — изотопия, соединяющая узлы κ_0 и κ_1, а γ_0 и γ_1 — их диаграммы. Тогда можно выбрать для каждого $t \in [0,1]$ проекцию γ_t узла κ_t так, чтобы*

1. *γ_t непрерывно зависела от t.*

2. *Для всех t, кроме конечного числа, γ_t являлась бы диаграммой узла κ_t.*

3. *В оставшихся ("исключительных") значениях t происходило бы ровно одно из "преобразований Рейдемейстера", показанных на рисунке 1.*

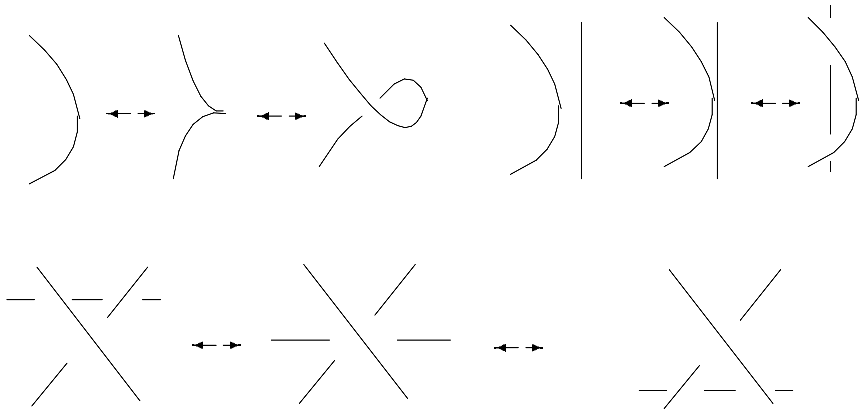

Рис. 1: Преобразования Рейдемейстера

Рассмотрим раскраски диаграммы узла в три цвета (каждую непрерывную дугу на диаграмме раскрашиваем в один цвет). Назовем раскраску правильной, если в каждой точке самопересечения три цвета пересекающихся дуг либо все различны, либо все одинаковы.

Теорема 5 *Число правильных раскрасок диаграммы узла не зависит от выбора диаграммы (а только от самого узла) и одинаково для изотопных узлов.*

Идея доказательства состоит в том, что, согласно Теореме 4, достаточно проверить, что число правильных раскрасок не меняется при преобразованиях Рейдемейстера. Рассмотрим первое преобразование (рождение петли). Поскольку в точке, появившейся после рождения петли, сходятся не три различных дуги, а только две (или, возможно, даже одна), то в любой правильной раскраске эти дуги должны быть раскрашены одинаково. Тогда каждой раскраске диаграммы без петли мы однозначно сопоставим раскраску диаграммы с петлей — две вновь появившихся дуги просто наследуют цвет дуги, на которой образовалась петля. Очевидно, условие правильности раскраски при этом нарушиться не может, и так мы получим все возможные правильные раскраски. Значит, число правильных раскрасок при первом преобразовании Рейдемейстера не меняется. Для двух остальных преобразований Рейдемейстера рассуждение столь же элементарно, но длиннее — мы не будем проводить его подробно.

Теорема 5 позволяет доказать, что узлы, изображенные на рисунке 2 (они называются *тривиальным узлом* и *трилистником*), не изотопны. Действительно, для тривиального узла число правильных раскрасок равно 3, а для трилистника — 9.

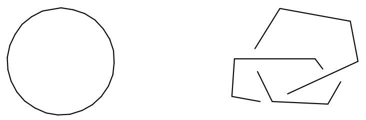

Рис. 2: Тривиальный узел и трилистник