Лекция 2

С. С. Анисов*

20 февраля 1998 г.

Краткое содержание

В этой лекции обсуждаются понятия топологического пространства, гомеоморфизма и гомотопической эквивалентности.

Множество X называется *топологическим пространством*, если в нем задан набор подмножеств $\mathcal{T}$ (называемый *топологией*, а подмножества в него входящие, называются *открытыми*), обладающий следующими свойствами:

1. Объединение любого набора открытых множеств открыто: если $\forall \alpha \in \mathcal{A}\ V_\alpha \in \mathcal{T}$, то $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \in \mathcal{T}$ (для любого множества индексов $\mathcal{A}$).
2. Пересечение конечного набора открытых множеств открыто: если $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T}$, то $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{T}$.
3. Пустое множество и все пространство X открыты: $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

Отображение топологических пространств $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт: $\forall V \in \mathcal{T}_Y\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Пример 1 В $\mathbb{R}$ открытыми являются подмножества V, обладающие таким свойством: $\forall x \in V \exists \epsilon > 0 : (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset V$. Отображение (функция) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно, если для каждого $a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 2 Всякое подмножество Y произвольного топологического пространства X естественно наделяется *индуцированной топологией*: подмножество $V \subset Y$ считается открытым в индуцированной топологии, если найдется подмножество $U \subset X$, открытое в исходной топологии и такое, что $V = U \cap Y$.

Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если найдется непрерывное взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ такое, что обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ также непрерывно.

Задача Придумайте пример, показывающий, что без последнего условия нельзя обойтись — отображение f^{-1} может не оказаться непрерывным, даже если существует.

Нетрудно видеть, что отношение гомеоморфности топологических пространств является отношением эквивалентности: каждое пространство гомеоморфно самому себе; если пространство A гомеоморфно пространству B, то B гомеоморфно A, и два пространства, порознь гомеоморфные третьему, гомеоморфны между собой. Гомеоморфные пространства топологически неотличимы. Однако топологические пространства можно задавать по-разному, и иногда доказательство гомеоморфности — нетривиальная задача.

Пример 3 Пространства $\mathbb{C}P^1$ и S^2 гомеоморфны (уточните, в какой топологии...). Отображение $f : \mathbb{C}P^1 \to S^2$ ставит в соответствие элементу S^2, т.е. тройке вещественных чисел x, y, z, связанных соотношением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, элемент $\mathbb{C}P^1$, т.е. пару комплексных чисел $[u : v]$, определенных с точностью до пропорциональности, по следующей формуле: $u = x + iy, v = 1 + z$. Проверьте, что это соответствие взаимно однозначно и непрерывно. Выпишите формулу для обратного отображения, и проверьте, что оно тоже непрерывно.

Пример 4 Группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ гомеоморфна множеству базисов в $\mathbb{R}^n$. Для установления гомеоморфизма выберем в $\mathbb{R}^n$ какой-нибудь стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$. Теперь преобразованию $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ поставим в соответствие базис $f_1 = Ae_1, \ldots, f_n = Ae_n$. Так же можно показать, что ортогональная группа $\mathrm{O}(n)$ гомеоморфна множеству *ортонормированных* базисов в $\mathbb{R}^n$.

Пример 5 Рассмотрим на плоскости шарнирный механизм, состоящий из трех жестких стержней длины 1, соединенных последовательно шарнирами. Внешние концы двух крайних стержней закреплены в точках a и b на расстоянии, немного меньшем 3. Множество возможных положений этого шарнирного механизма

*anisov@mccme.ru

является топологическим пространством (уточните топологию...). Покажем, что оно гомеоморфно окружности.

Множество возможных положений незакрепленного конца крайнего левого стержня представляет собой дугу окружности: угол φ, образуемый этим стержнем с отрезком ab, изменяется от $-\varphi_0$ до φ_0, где величина φ_0 зависит от расстояния между a и b и для задачи несущественна. Каждому значению $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ отвечают два состояния шарнирного механизма: два оставшихся стержня могут образовывать угол "вершиной вверх" или "вершиной вниз". Каждому из значений $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = -\varphi_0$ отвечает одно состояние механизма — два оставшихся стержня лежат на одной прямой. Соответствие f между состояниями механизма и точками окружности $S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ мы определим так. Положению механизма с $\varphi = \varphi_0$ сопоставим точку $(1,0)$, положению $\varphi = -\varphi_0$ — точку $(-1,0)$. Положению с $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ "вершиной вверх" сопоставим точку $x = \varphi/\varphi_0$, $y > 0$ (такая точка ровно одна), а положению с тем же φ "вершиной вниз" — точку $x = \varphi/\varphi_0$, $y < 0$ (такая точка тоже ровно одна). Проверьте, что полученное отображение является гомеоморфизмом.

Два непрерывных отображения топологических пространств $f_0, f_1 : X \to Y$ называются *гомотопными*, если их можно соединить непрерывным семейством отображений $f_t : X \to Y$, $t \in [0,1]$. Непрерывность семейства означает, что элемент $f_t(x) \in Y$ непрерывно зависит как от $x \in X$, так и от $t \in [0,1]$ (точнее, непрерывно зависит от пары (x,t)). Нетрудно видеть, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Пример 6 Тождественное отображение $f_1 = id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ гомотопно отображению f_0, переводящему все $\mathbb{R}^n$ в начало координат. Гомотопия очевидна: $f_t(x) = tx$.

Пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что композиция $g \circ f : X \to X$ гомотопна тождественному отображению X в себя, а композиция $f \circ g : Y \to Y$ — тождественному отображению Y в себя. Нетрудно видеть, что гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны (но обратное неверно), и что гомотопическая эквивалентность пространств — отношение эквивалентности.

Пример 7 Пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно пространству pt, состоящему из одной точки. Пара отображений f и g такова: $f : \mathbb{R}^n \to pt$ переводит все элементы $\mathbb{R}^n$ в единственный элемент пространства pt (других отображений $\mathbb{R}^n \to pt$ просто и не существует), а отображение $g : pt \to \mathbb{R}^n$ переводит единственный элемент пространства pt в начало координат. Композиция $g \circ f$ является тождественным отображением $pt \to pt$ (других отображений $pt \to pt$ просто и не существует), а композиция $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ это отображение, переводящее все $\mathbb{R}^n$ в начало координат — согласно предыдущему примеру, это отображение гомотопно тождественному.

Пример 8 Группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{O}(n)$ гомотопически эквивалентны. Согласно примеру 4 для этого достаточно доказать, что пространство $V(n,n)$ всех базисов в $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно пространству $V_O(n,n)$ всех ортонормированных базисов.

Для доказательства введем вспомогательное пространство $V_N(n,n)$, состоящее из *нормированных* (но не обязательно ортогональных) базисов. Докажем гомотопически эквивалентности $V \sim V_N$ и $V_N \sim V_O$.

Отображение $f : V_N \to V$ — естественное вложение (каждому базису сопоставляется он сам, но уже как элемент V). Отображение $g : V \to V_N$: базису $f_1, \ldots, f_n$ соответствует нормированный базис $f_1/|f_1|, \ldots, f_n/|f_n|$. Отображение $g \circ f : V_N \to V_N$ — тождественное; отображение $f \circ g : V \to V$ гомотопно тождественному: гомотопия имеет вид $u_t : (f_1, \ldots, f_n) \mapsto (f_1 * (t/|f_1| + 1 - t), \ldots, f_n * (t/|f_n| + 1 - t))$.

Для доказательства гомотопической эквивалентности $V_N \sim V_O$ введем цепочку вспомогательных пространств $V_N = W_0 \supset W_1 \supset \ldots \supset W_n = V_O$ и докажем цепочку гомотопических эквивалентностей $W_0 \sim W_1 \sim \ldots \sim W_n$. Пространство W_k состоит из нормированных базисов $f_1, \ldots, f_n$, в которых каждый из векторов $f_1, \ldots, f_k$ ортогонален пространству, натянутому на остальные векторы. Докажем, например, что $W_0 \sim W_1$. Отображение $f : W_1 \to W_0$ — естественное вложение. Отображение $g : W_0 \to W_1$ устроено так: $g(f_1, \ldots, f_n) = (f_1 - (f_1, f_2)f_2 - \ldots - (f_1, f_n)f_n, f_2, \ldots, f_n)$ (процесс ортогонализации Грама). Композиция $g \circ f$ — тождественное отображение, композиция $f \circ g$ гомотопна тождественной (придумайте гомотопию !). Остальные гомотопические эквивалентности $W_k \sim W_{k+1}$ устанавливаются аналогичным образом.