Лекция 4

С. С. Анисов*

6 марта 1998 г.

Краткое содержание

Изучается понятие накрытия и его взаимоотношения с фундаментальной группой.

Определение Отображение топологических пространств $p : T \to X$ называется *накрытием*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U \subset X$ такая, что для некоторого дискретного множества G существует гомеоморфизм $\varphi : U \times G \to p^{-1}(U)$ такой, что $p(\varphi(x, g)) = x$ для всякого $x \in U$ и всякого $g \in G$.

Иными словами, прообраз $p^{-1}(U) \subset T$ достаточно малой окрестности U произвольно взятой точки $x \in X$ гомеоморфен дискретному объединению нескольких экземпляров (возможно, бесконечного числа) окрестности U, причем каждый экземпляр гомеоморфно проектируется на X отображением p. Иногда накрытием называют всю тройку (T, X, p), в этом случае X — *база* накрытия, T — *накрывающее пространство*, и p — *проекция*. Мощность множества G называют *числом листов* накрытия. Нетрудно видеть, что прообраз $p^{-1}(x)$ произвольной точки $x \in X$ гомеоморфен G (и, следовательно, дискретен).

Примеры накрытий:

1. Тривиальное накрытие: $T = X \times G$, $p(x, g) \stackrel{\text{def}}{=} x$.
2. $T = \mathbb{R}$, $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $p(t) = e^{\pi i t}$. Это нетривиальное счетнолистное накрытие.
3. $T = S^n$, $X = \mathbb{R}P^n$, p относит точке сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ прямую, проходящую через эту точку и начало координат. Это накрытие двулистно.
4. Проекция единичной окружности в $\mathbb{R}^2$ на координатную ось накрытием не является: в точках $x = \pm 1$ условие из определения не выполнено.

Обозначим $K_n \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]^n$ единичный n-мерный куб. Основным техническим средством при работе с накрытиями служит

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии) *Пусть $p : T \to X$ — накрытие, и $f : K_n \to X$ — непрерывное отображение. Обозначим $x = f(0, \dots, 0)$. Тогда для каждой точки $y \in T$ такой, что $p(y) = x$, существует и единственно отображение $F : K_n \to T$* (поднятие *отображения f) такое, что $F(0, \dots, 0) = y$ и $f = p \circ F$.*

Доказательство проводится индукцией по n. База $n = 0$ очевидна. Индукционный шаг мы проведем на примере перехода к $n = 1$; "общий" индукционный шаг не отличается ничем, кроме более громоздких обозначений.

Итак, дано отображение (путь) $f : [0, 1] \to X$ такое, что $f(0) = x$. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$, состоящее из $a \in [0, 1]$ таких, что подъем $F(t)$ существует и единствен при $t \in [0, a]$. Множество $\mathcal{A}$ непусто: $0 \in \mathcal{A}$. Докажем, что оно открыто. Пусть $a \in A$; рассмотрим для точки $f(a)$ окрестность $U \subset X$, обладающую свойствами, указанными в определении накрытия. Прообраз $p^{-1}(a)$ гомеоморфен дискретному семейству таких же окрестностей. Выберем ту из них, которой принадлежит $F(a)$, обозначим ее $V \subset T$. Тогда ограничение $p|_V : V \to U$ является, по условию, гомеоморфизмом, и мы можем положить для $t \in U$ просто $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} (p|_V)^{-1}(f(t))$. Тем самым поднятие F построено над всей окрестностью U. Единственность очевидна. Поэтому $U \subset \mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ открыто.

Докажем, что $\mathcal{A}$ замкнуто. Пусть a — предельная точка $\mathcal{A}$. Рассмотрим для a такую же окрестность U точки $f(a)$, как и прежде. Прообраз $W = f^{-1}(U) \subset [0, 1]$ открыт (в силу непрерывности f) и поэтому содержит бесконечное число точек $a_i \in \mathcal{A}$. В силу непрерывности F все $F(a_i) \in T$ лежат в одной и той же связной компоненте V прообраза $p^{-1}(U)$ (рассуждение, в сущности, такое же как и выше...). Теперь положим $F(a) = (p|_V)^{-1}(f(a))$ — ясно, что теперь F непрерывна и в точке a, и что другого варианта нет. Поэтому $a \in \mathcal{A}$, и $\mathcal{A}$ замкнуто. Открытое, замкнутое и непустое подмножество $\mathcal{A} \subset [0, 1]$ совпадает со всем $[0, 1]$. ■

*anisov@mccme.ru

Теорема 2 *Пусть $p : T \to X$ — накрытие, и пространство T линейно связно. Тогда отображение $p_* : \pi_1(T) \to \pi_1(X)$ является мономорфизмом (вложением, т.е. имеет тривиальное ядро). Индекс подгруппы $p_*(\pi_1(T))$ в группе $\pi_1(X)$ равен числу листов накрытия.*

Доказательство Пусть петля $\gamma : [0,1] \to T$ с начальной точкой $\gamma(0) = y_0$ проектируется в стягиваемую петлю $p \circ \gamma : [0,1] \to X$ с начальной точкой $p(y_0) \overset{\text{def}}{=} x_0$. Гомотопию $f_\tau(t)$, $t, \tau \in [0,1]$, стягивающую петлю $p \circ \gamma$ в точку, можно рассматривать как отображение $f : [0,1]^2 \to X$, для которого $f_0(t) = p(\gamma(t))$ и $f_1(t) = x_0$. По теореме 1 это отображение можно поднять до отображения $F : [0,1]^2 \to T$ такого, что $p \circ F = f$. Нетрудно видеть, что F является гомотопией, стягивающей петлю γ в точку y_0. Следовательно, ядро гомоморфизма p_* тривиально.

Рассмотрим теперь петлю $\varrho(t)$ в пространстве X с началом в точке $\varrho(0) = x_0$. Поднимем ее (по теореме 1) до пути $\sigma(t)$ в пространстве T с начальной точкой $\sigma(0) = y_0$. Поставим в соответствие петле ϱ точку $\sigma(1) \in p^{-1}(x_0)$. Гомотопным петлям соответствует одна и та же точка: действительно, при гомотопии петли ϱ точка $\sigma(1)$ должна изменяться непрерывно, но множество $p^{-1}(x_0)$ дискретно, и поэтому она стоит на месте. Тем самым построено отображение $\pi_1(X) \to p^{-1}(x_0)$. Из линейной связности T следует, что это — отображение на. Пусть теперь петлям ϱ_1 и ϱ_2 поставлена в соответствие одна и та же точка. Тогда петля $\varrho_1 \varrho_2^{-1}$ является образом петли $\sigma_1 \sigma_2^{-1}$ при отображении p, и поэтому принадлежит образу гомоморфизма p_*. Тем самым построено взаимно однозначное соответствие между точками множества $p^{-1}(x_0)$ и смежными классами $\pi_1(X)$ по $p_*(\pi_1(T))$. ■

Следствие $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ *при* $n > 1$.

Доказательство Рассмотрим двулистное накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$, указанное в начале лекции. При $n > 1$ $\pi_1(S^n) = 1$. Подгруппа $p_*(\pi_1(S^n))$ тривиальна; по теореме 2 она имеет индекс 2 в $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. Следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ состоит из 2 элементов. ■

Назовем топологическое пространство X хорошим, если в нем любые два достаточно близких пути гомотопны. Класс хороших пространство весьма широк — например, таковы все многообразия, букеты и вообще все рассматривавшиеся нами до сих пор пространства. Примером плохого пространства является, например, множество точек плоскости, у которых хотя бы одна координата иррациональна (убедитесь !).

Теорема 3 *Пусть X — линейно связное хорошее пространство. Тогда над X существует накрытие $p : T \to X$, в котором накрывающее пространство T — линейно связное и односвязное.*

Доказательство Отметим в X точку x_0. Назовем два пути f_1 и f_2 с началом в точке x_0 эквивалентными, если $f_1(1) = f_2(1)$ и петля $f_1 f_2^{-1}$ стягиваема. Теперь возьмем в качестве T пространство классов эквивалентности путей. Топологию в T определим очевидным образом. Отображение $p : T \to X$ сопоставляет пути $f \in T$ его конечную точку $p(f) \overset{\text{def}}{=} f(1) \in X$. Тот факт, что тройка (T, X, p) образует накрытие, немедленно следует из определения хорошего пространства. Доказательство односвязности T — упражнение на применение теоремы 1. ■

Небольшой модификацией теоремы 3 можно получить более общее утверждение:

Теорема 3′ *Пусть X — линейно связное хорошее пространство, и G — произвольная подгруппа $\pi_1(X)$. Тогда существует накрытие $p : T \to X$, в котором T линейно связно и таково, что $p_*(\pi_1(T)) = G$.*

Накрытие $p : T \to X$ с односвязным T называют *универсальным*. Причиной такого названия является следующее утверждение:

Теорема 4 *Пусть $p : T \to X$ — универсальное накрытие над хорошим пространством, а $p' : T' \to X$ — произвольное накрытие с линейно связным накрывающим пространством T'. Тогда существует непрерывное отображение $f : T \to T'$ такое, что $p = f \circ p'$.*

Иными словами, произвольное накрытие получается "факторизацией" универсального.

Доказательство Зафиксируем точку $y_0 \in T$ и выберем в качестве $f(y_0)$ произвольную точку $y'_0 \in (p')^{-1}(p(y_0))$. Для любой другой точки $y \in T$ поступим так. Соединим y с y_0 путем γ — это возможно, поскольку T линейно связно. Спроектируем γ на X, а получившийся путь $p \circ \gamma$ поднимем (по теореме 1) до пути γ' в T' с началом y'_0. Конец $\gamma'(1)$ этого пути и возьмем в качестве $f(y)$. Поскольку T односвязно, путь γ определен однозначно с точностью до гомотопии. Отсюда следует, что точка $f(y) = \gamma'(1)$ также определена однозначно. Проверка непрерывности построенного отображения f и равенства $p = f \circ p'$ тривиальна. ■