Математический Колледж НМУ **Топология, 2 семестр**

Лекция 5

С. С. Анисов*

13 марта 1998 г.

Краткое содержание

Определяется эйлерова характеристика поверхности.

Граф Γ называется вложенным в двумерную поверхность S (с краем или без края), если его ребра представляют собой непрерывные кривые, пересекающиеся только в вершинах, а куски ("грани"), на которые поверхность S разбита ребрами, гомеоморфны открытым кругам.

Примеры вложенных графов:

1. S — сфера; Γ — экватор, на котором отмечена 1 точка (вершина).
2. S — тор; Γ состоит из параллели и меридиана.
3. S — круг; Γ состоит из n точек на границе и ребер, образующих некоторую триангуляцию n-угольника.
4. S — лист Мебиуса, граф Γ изображен на рисунке 1.
5. S — ручка (тор с дыркой), граф Γ изображен на рисунке 2.

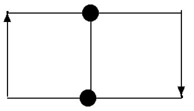

Рис. 1

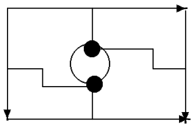

Рис. 2

Можно показать (мы не будем этого делать), что в поверхность S можно вложить конечный граф тогда и только тогда, когда она компактна.

Основным результатом данной лекции является

Теорема 1 *Пусть Γ — связный граф, вложенный в поверхность S. Обозначим V число вершин графа Γ, E — число его ребер, а F — число граней, на которые S разбита ребрами. Тогда величина $\chi(S) = V - E + F$ не зависит от выбора графа Γ и его вложения в поверхность S, а зависит только от самой поверхности.*

Число $\chi(S)$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности S.

Доказательство теоремы 1 мы проведем в несколько этапов. Напомним, что *циклом* в графе называется замкнутый путь, проходящий по его ребрам, причем ни по какому ребру не проходящий дважды. Граф называется *деревом*, если он связный и не имеет циклов.

Этап 1. S — сфера, Γ — дерево. Параллельно с доказательством мы вычислим эйлерову характеристику сферы — она равна 2. Как нетрудно видеть, для дерева $V = E + 1$ (доказательство несложной индукцией по числу вершин), и требуется лишь доказать, что $F = 1$, т.е., дополнение к дереву на плоскости линейно связно. Как проводить кривую, соединяющую две произвольные точки a и b, видно из рисунка 3: сначала a и b соединяются с точками, лежащими очень близко от графа, а эти последние соединяются кривой, идущей все время рядом с ребрами — для дерева нетрудно описать, как именно.

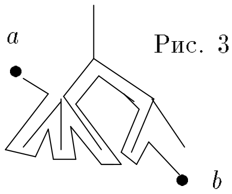

Рис. 3

Этап 2. S — сфера, Γ — произвольный граф. Для этого случая мы используем следующее классическое утверждение (доказывать которое не будем):

Лемма (Жордана) *Подмногообразие двумерной сферы, гомеоморфное окружности, разбивает сферу на 2 части, гомеоморфные открытым кругам.*

Выделим теперь в графе Γ максимальное дерево, т.е. связную совокупность ребер, не содержащую циклов и такую, что добавление к ней произвольного ребра γ приводит к появлению цикла. Рассмотрим такое ребро ("перемычку") и удалим его из графа. При этом граф останется связным, поскольку ребро γ входит

*anisov@mccme.ru

в некоторый цикл $\mathcal{Z}$. Число V вершин не изменится, число E ребер уменьшится на единицу. Заметим теперь, что из леммы Жордана, примененной к циклу $\mathcal{Z}$, следует, что с двух сторон от ребра γ находятся точки, принадлежащие двум различным граням. После удаления γ эти грани сольются, и тем самым F также уменьшится на единицу, а число $V-E+F$ не изменится. Удаляя последовательно все перемычки, сведем утверждение к случаю дерева, который мы разбирали выше. Тем самым для сферы теорема доказана.

Этап 3. S — произвольная поверхность. Рассмотрим на ней два вложенных графа, Γ_1 и Γ_2, и докажем, что $V_1-E_1+F_1=V_2-E_2+F_2$. Пошевелив граф Γ_2, мы можем добиться, чтобы ребра Γ_1 и Γ_2 пересекались лишь в конечном числе точек (но пересекались !). Рассмотрим теперь граф Γ, получающийся "объединением" Γ_1 и Γ_2 — его вершинами будут вершины обоих графов и точки пересечения их ребер. Мы докажем, что $V_1-E_1+F_1=V-E+F=V_2-E_2+F_2$.

Рассмотрим произвольную грань $\mathcal{A}$ графа Γ_1. Пусть на ее границе находится n вершин графа Γ (и, соответственно, n ребер), а внутри — v вершин, e ребер и f граней. Грань $\mathcal{A}$ гомеоморфна диску, эйлерова характеристика которого равна 1 — это немедленно следует их уже доказанной теоремы про сферу. Поэтому $(n+v)-(n+e)+f=v-e+f=1$. Если мы удалим из Γ все вершины и ребра, лежащие внутри $\mathcal{A}$, то граф останется связным. Число ребер уменьшится на e, число вершин — на v, и число граней — на $f-1$ (было f граней, осталась одна — $\mathcal{A}$. Но $f-1=e-v$, и поэтому величина $V-E+F$ не изменится. Действуя подобным образом, мы можем, не изменяя $V-E+F$, "очистить" все грани графа Γ_1, т.е. получить граф, отличающийся от Γ_1 только тем, что на некоторых ребрах поставлены дополнительные вершины. Нетрудно видеть, что удаление таких вершин не влияет на $V-E+F$. Поэтому $V-E+F=V_1-E_1+F_1$. Равенство $V-E+F=V_2-E_2+F_2$ доказывается аналогично. Теорема доказана.

Свойства эйлеровой характеристики:

Свойство 1 *Пусть поверхность S представлена в виде объединения поверхностей A и B. Тогда $\chi(A\cup B)=\chi(A)+\chi(B)-\chi(A\cap B)$.*

Для доказательства нужно вложить в S граф так, чтобы он оказался вложен в $A\cap B$, $\overline{A\setminus B}$ и $\overline{B\setminus A}$ (черта означает замыкание). Это возможно, если эти множества компактны. Заметим, что это свойство означает, что эйлерова характеристика представляет собой нечто вроде "меры" (площади) на поверхности.

Свойство 2 *Пусть A и B — поверхности с краем, а поверхность S получена их склеиванием по какой-нибудь компоненте связности края. Тогда $\chi(S)=\chi(A)+\chi(B)$.*

Компонента связности края представляет собой окружность. Рассмотрим графы, вложенные в A и B. Тогда на поверхности S возникает связный граф, являющийся их объединением. Свойство теперь следует из того, что на окружности склейки лежит столько же вершин, сколько и ребер. Заметим, что свойство 2 можно было бы считать частным случаем свойства 1, если положить эйлерову характеристику окружности равной нулю. Этой действительно так: существует способ определить эйлерову характеристику не только для поверхности, в которую можно вложить граф, но и для существенно более широкого класса топологических пространств — в частности, для всех компактных многообразий. При этом сохраняется свойство 1 и оказывается, что $\chi(S^1)=0$.

Следствие 1 *Пусть поверхность S получена из поверхности S' вырезанием маленькой дырки. Тогда $\chi(S)=\chi(S')-1$. В частности, эйлерова характеристика сферы с n дырками равна $2-n$.*

Это следует из того, что маленькая дырка представляет собой круг, эйлерова характеристика которого равна 1.

Следствие 2 *Эйлерова характеристика сферы с $n+g$ дырками, g из которых заклеены ручками ("сфера с g ручками и n дырками"), равна $2-2g-n$.*

Эйлерова характеристика ручки (тора с дыркой) равна -1 — см. рис. 2.

Следствие 3 *Эйлерова характеристика листа Мебиуса равна 0, проективной плоскости 1, бутылки Клейна 0.*

Эйлерова характеристика листа Мебиуса видна из рис. 1. Проективная плоскость представляет собой лист Мебиуса и круг, склеенные по общей границе — окружности. Бутылка Клейна — два листа Мебиуса, склеенных по границе.

На самом деле следствия 1, 2 и 3 позволяют найти эйлерову характеристику любой компактной поверхности (с краем или без края), ввиду следующей классификационной теоремы, которую мы оставим без доказательства:

Теорема 2 *Любое компактное двумерное многообразие (возможно, с краем) гомеоморфно либо сфере с g ручками и n дырками, либо проективной плоскости с ручками и дырками, либо бутылке Клейна с дырками.*

Следующая теорема описывает поведение эйлеровой характеристики при накрытиях.

Теорема 3 *Пусть $p : S' \to S$ — n-листное накрытие. Тогда $\chi(S') = n\chi(S)$.*

Доказательство Вложим в поверхность S граф Γ с V вершинами и E ребрами, и рассмотрим его прообраз $\Gamma' \subset S'$ при отображении p. Очевидно, Γ' — граф с nV вершинами. Ограничение отображения p на прообраз произвольного ребра α (без концов) представляет собою n-листное накрытие над α. Поскольку $\pi_1(\alpha) = 0$ (α гомеоморфно интервалу, т.е. стягиваемо), это накрытие тривиально. Поэтому прообраз каждого ребра состоит из n различных ребер, и общее число ребер графа Γ' равно nE. Аналогично, прообраз каждой грани (без границы), на которые Γ разбивает S, гомеоморфен несвязному объединению n кругов. Поэтому граф Γ' вложен в поверхность S' (все грани гомеоморфны кругам), и число граней равно nF, где F — число граней на поверхности S. Отсюда $\chi(S') = nV - nE + nF = n\chi(S)$. ■