НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 1

1. Основные определения и примеры: группа Ли, подгруппа Ли, гомоморфизм и изоморфизм групп Ли, линейное представление группы Ли, действие группы Ли.

2. Орбиты и стабилизаторы. Теорема о действии группы Ли на гладком многообразии. Теорема о гомоморфизме.

3. Локально тривиальное расслоение. Введение гладкой структуры на множестве G/H левых смежных классов. Теорема о действии G на G/H и о факторгруппе.

4. Теоремы о транзитивном действии и об эпиморфизме.

5. Теоремы о полном прообразе подгруппы Ли при гомоморфизме и о пересечении подгрупп Ли.

Задачи к занятию 1

1) Прямое произведение групп Ли является группой Ли.

2) Подгруппа Ли сама является группой Ли.

3) Пусть H — подгруппа группы Ли G. Если в группе G существует такая окрестность единицы U_e , что $H \cap U_e$ есть подмногообразие, то H — подгруппа Ли.

4) Любая подгруппа Ли замкнута.

5) $SL(n)$ — подгруппа Ли коразмерности 1 группы $GL(n)$.

6) Группа $O(n)$ ортогональных матриц порядка n есть подгруппа Ли группы $GL(n)$. Найти ее размерность.

7) Группа $U(n)$ унитарных матриц порядка n есть вещественная подгруппа Ли группы $GL(n, \mathbb{C})$. Найти ее размерность.

8) При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ подмножество $\{(e^{i\alpha x}, e^{i\beta x}), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$ является подгруппой Ли?

9) Каждой матрице $A \in GL(n)$ сопоставим линейные преобразования AdA и SqA пространства $Mat(n)$ всех матриц порядка n по формулам:

$$(AdA)X = AXA^{-1}, (SqA)X = AXA^t.$$

Доказать, что AdA и SqA — линейные представления группы $GL(n)$ в пространстве $Mat(n)$.

10) Пусть $\alpha : G \times X \to X$ —действие группы Ли G на гладком многообразии X, а отображение $\alpha_x : G \to X$ задается формулой: $g \mapsto \alpha(g)x$. Доказать, что отображение α_x гладкое и имеет постоянный ранг.

11) Доказать, что группа $Sp(V, \omega)$ невырожденных линейных преобразований, сохраняющих заданную кососимметрическую билинейную форму ω, является линейной группой Ли. Найти ее размерность, если ω невырождена.

12) Пусть V — линейное пространство. В пространстве алгебр на V (тензоров типа (1,2)) определено линейное представление группы $GL(V)$ (как?). Доказать, что группа автоморфизмов любой алгебры является линейной группой Ли.

13) При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2, x \mapsto (e^{i\alpha x}, e^{i\beta x})$ является гомоморфизмом групп Ли?

14) Пространство G/H хаусдорфово.

15) Пусть H — подгруппа Ли группы Ли G. Доказать, что существует такое подмногообразие $S \subset G$, содержащее единицу $e \in G$, что отображение

$$f : S \times H \to G, (s, h) \mapsto sh,$$

является диффеоморфизмом прямого произведения $S \times H$ на открытое подмножество группы Ли G.

16) Пусть $p_i : X_i \to Y_i (i = 1, 2)$ — локально тривиальное расслоение со слоем Z_i. Тогда отображение

$$p_1 \times p_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2, (x_1, x_2) \mapsto (p_1(x_1), p_2(x_2)),$$

является локально тривиальным расслоением со слоем $Z_1 \times Z_2$.

17) Пусть H_1 и H_2 — подгруппы Ли группы Ли G. Доказать, что $H_1 \cap H_2$ тоже является подгруппой Ли и $T_e(H_1 \cap H_2) = T_e(H_1) \cap T_e(H_2)$.