НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 2

1. Лево- и правоинвариантные тензоры на группе Ли. Теорема о существовании инвариантной формы объема на компактной группе Ли.

2. Теорема о свойствах конечномерных представлений компактной группы Ли и о максимальных компактных подгруппах в $GL(n,\mathbb{C})$ и $GL(n,\mathbb{R})$.

3. Алгебра Ли: определения и примеры.

4. Подалгебры, идеалы, факторалгебры, гомоморфизмы и линейные представления алгебр Ли. Присоединенное представление. Теорема Адо (без доказательства).

Задачи к занятию 2

1. Продумать процедуру получения лево- и правоинвариантных тензоров любого типа на группе Ли G.

2. Описать все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3 a) над полем $\mathbb{C}$; b) над полем $\mathbb{R}$.

3. Пусть A — ассоциативная алгебра. Положим $[x,y]=xy-yx$. Доказать, что эта операция вводит на A структуру алгебры Ли (иногда ее обозначают A_L). В частности, получаем следующие классические алгебры Ли:

2a) $\mathfrak{gl}(V)=\mathfrak{gl}(n)$ — алгебра Ли всех линейных операторов в n-мерном пространстве V = алгебре Ли матриц порядка n.

2b)$\mathfrak{sl}(n)=\{x\in\mathfrak{gl}(n)|tr(x)=0\}$

2c) $\mathfrak{so}(n)=\{x\in\mathfrak{gl}(n)|x+x^t=0\}$

2d) алгебры Ли над R:

$$\mathfrak{u}(n)=\{x\in\mathfrak{gl}(n;C)|x+x^*=0\}$$

$$\mathfrak{su}(n)=\mathfrak{u}(n)\cap\mathfrak{sl}(n)$$

2e) Пусть 1_n обозначает единичную матрицу порядка n. Положим

$$J_{2n}=\begin{pmatrix}0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{pmatrix}$$

Тогда $\mathfrak{sp}(2n)=\{x\in\mathfrak{gl}(n)|x^tJ_{2n}+J_{2n}x=0\}$

3. Дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение $D:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, удовлетоворяющее условию

$$D[x,y]=[Dx,y]+[x,Dy].$$

Доказать, что множество всех дифференцирований аглебры Ли $\mathfrak{g}$ образует алгебру Ли отновительно операции

$$[D_1,D_2]=D_1D_2-D_2D_1.$$

4. Описать все дифференцирования (по модулю внутренних)

4a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

4b) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;

4c) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$;

4d) $\mathfrak{sl}(2)$.

5. Пусть $\mathfrak{h}$ — линейное подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Положим:

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \eta] \in \mathfrak{h}, \forall \eta \in \mathfrak{h}\}$$

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [\xi, \eta] = 0, \forall \eta \in \mathfrak{h}\}$$

Доказать, что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$ и $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$ — подалгебры Ли в $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}$ — идеал в $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}}$.

6. Описать все неприводимые конечномерные представления

3a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

3b) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$.

7. Для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ определим линейный опратор $ad\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:

$$ad\xi(\eta) = [\xi, \eta]$$

Доказать, что $ad\xi$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (внутреннее дифференцирование), что соответствие $\xi \to ad\xi$ задает представление $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ и что $\ker ad = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

8. Указать точное конечномерное представление

5a) n-мерной коммутативной алгебры Ли;

5b) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$.