НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 3

1. Четыре способа ввести операцию в касательном пространстве к единице группы Ли: через координаты, через класс кривых, через присоединенное представление группы и через векторные поля.
2. Касательный гомоморфизм и касательное представление. Касательная алгебра стабилизатора.
3. Дифференциальные уравнения путей в группе Ли.
4. Теорема единственности для гомоморфизмов групп Ли.

Задачи к занятию 3

1. Касательная алгебра подгруппы Ли группы Ли G есть подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, для любой линейной группы Ли операция коммутирования в ее касательной алгебре задается формулой $[X,Y] = XY - YX$.
2. Касательная алгебра ядра гомоморфизма групп Ли совпадает с ядром касательного гомоморфизма.
3. Вычислить $d_e(\det)$ и описать алгебру Ли группы $SL(n)$.
4. Пусть T, S — линейные представления группы Ли G, а dT, dS — их дифференциалы. Вычислить дифференциалы сопряженного представления T^* и произведения $T \otimes S$.
5. Доказать, что пространство левоинвариантных векторных полей на группе Ли образует подалгебру Ли в $Vect(G)$, изоморфную $\mathfrak{g}$.
6. Пусть H —нормальная подгруппа Ли группы Ли G. Тогда $\mathfrak{h}$ — идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Ли факторгруппы G/H есть факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.
7. Пусть T — линейное представление группы Ли G в пространстве V и $H = G_v$ — стабилизатор элемента $v \in V$. Доказать, что

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{h} \mid dT(\xi)v = 0\}$$

.

8. Вычислить dSq и найти алгебры Ли групп $O(n)$, $Sp(2n)$ и $U(n)$.
9. Пусть $f : G \to H$ — гомоморфизм групп Ли. Доказать формулы:

$$df(g\xi) = f(g)df(\xi); df(\xi g) = df(\xi)f(g)$$

.

10. Ядро присоединенного представления связной группы Ли совпадает с ее центром $Z(G)$. Алгебра Ли группы $Z(G)$ совпадает с центром $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.
11. Пусть T — линейное представление группы Ли G в пространстве V. Доказать, что подпространство $U \subset V$ инвариантно относительно T тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно представления dT алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

12. Пусть G_1, G_2 — связные подгруппы группы Ли G. Тогда

$$G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2.$$

И следовательно,

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2.$$

13. Связная подгруппа Ли H группы Ли G нормальна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.