НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 4

Экспоненциальное отображение и его свойства.

Обозначение: $g_\xi(t)$ — однопараметрическая подгруппа с направляющим вектором ξ.

Определение: $\exp : \mathfrak{g} \to G, \exp(\xi) = g_\xi(1)$ — экспоненциальное отображение.

Задачи

1. $g_\xi(t) = \exp(t\xi)$
2. Отображение exp дифференцируемо.
3. $d_0 \exp = id$.
4. Для группы $G = \mathbb{T}^1$ отображение exp не инъективно, а для группы $G = SL(n, \mathbb{R})$ — не сюръективно.
5. $f(\exp \xi) = \exp(df(\xi))$, в частности $Ad \exp \xi = \exp ad\xi$.
6. Если $[\xi, \eta] = 0$, то $\exp(\xi + \eta) = \exp \xi \cdot \exp \eta$.
7. Если $\mathfrak{g}$ коммутативна и G связна, то G коммутативна.
8. Если G коммутативна и связна, то $\exp(\mathfrak{g}) = G$.
9. Если G_1 и G_2 — изоморфные коммутативные группы Ли, то существует изоморфизм их касательных алгебр, при котором ядро гомоморфизма $\exp : \mathfrak{g}_1 \to G_1$ отображается на ядро гомоморфизма $\exp : \mathfrak{g}_2 \to G_2$.
10. Если Γ_1 и Γ_2 — две дискретные подгруппы группы Ли $\mathbb{R}^n$, то факторгруппы $\mathbb{R}^n/\Gamma_1$ и $\mathbb{R}^n/\Gamma_2$ изоморфны как группы Ли тогда и только тогда, когда существует отображение $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ такое, что $A\Gamma_1 = \Gamma_2$.
11. Любая дискретная подгруппа Γ группы Ли $\mathbb{R}^n$ переводится в подгруппу вида $\Gamma_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$.
12. Любая n-мерная связная коммутативная вещественная группа Ли изоморфна группе Ли вида $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{n-k}$.