НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 5

1. Теорема существования для гомоморфизмов групп Ли.
2. Теоремы о связной компоненте единицы группы Ли и о транзитивном действии группы Ли на связном многообразии.
3. Описание связных групп Ли с данной алгеброй Ли.
4. Понятие о локальной группе Ли.

Задачи

1. Доказать теорему: связная компонента единицы G^0 группы Ли G является нормальной подгруппой Ли. Остальные связные компоненты суть смежные классы по G^0. Факторгруппа G/G^0 дискретна.

2. Любая открытая подгруппа группы Ли G замкнута и содержит G^0.

3. Связная группа Ли порождается (как абстрактная группа) любой своей окрестностью единицы.

4. Доказать теорему: пусть группа Ли G транзитивно действует на связном гладком многообразии X. Тогда

A) группа G^0 также транзитивно действует на X;

B) $G/G^0 \cong G_x/G_x \cap G^0$;

C) если группа G_x связна для некоторого $x \in X$, то и группа G связна.

5. Группа $G = O(n)$ имеет две связные компоненты; $G^0 = SO(n)$.

6. Группы $Sp(2n)$ и $U(n)$ связны.

7. Группа $O(p, q)$ имеет 4 связные компоненты.

8. Пусть $f : G \to H$ — эпиморфизм групп Ли. Доказать эквивалентность условий:

A) f диффеоморфно отображает некоторую окрестность единицы группы G на окрестность единицы группы H.

B) $\ker f$ дискретно.

C) f — накрытие.

D) $\mathrm{d}f$ — изоморфизм касательных алгебр.

9. Любая дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли содержится в ее центре.

10. Описать связные вещественные группы Ли, размерность которых не превосходит 3.