НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98

Занятие 6

1. Коммутант группы Ли и алгебры Ли. Теорема о коммутанте связной односвязной группы Ли.

2. Разрешимые группы и алгебры Ли, их свойства. Связь между разрешимостью группы Ли и ее алгебры Ли.

3. Замыкание Мальцева подалгебры Ли. Теорема о коммутанте замыкания Мальцева.

4. Радикал группы Ли. Полупростые группы Ли.

5. Нильпотентные алгебры Ли. Теорема Энгеля.

6. Комплексификация алгебр Ли. Сохранение основных классов алгебр Ли (разрешимых, нильпотентных, полупростых) при комплексификации.

Задачи

1. Всякая подгруппа и всякая факторгруппа разрешимой группы Ли разрешима.

2. Если нормальная подгруппа Ли N и факторгруппа G/N разрешимы, то группа G разрешима.

3. Группа Ли разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ее односвязная накрывающая.

4. Всякая подалгебра и всякая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.

5. Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима.

6. Сумма разрешимых идеалов является разрешимым идеалом.

7. Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет коммутативных идеалов.

8. Доказать эквивалентность трех формулировок теоремы Ли для групп Ли.

9. Сформулировать теорему Ли для алгебр Ли.

10. A) Ограничение любого неприводимого конечномерного комплексного представления связной группы Ли на радикал скалярно.

B) Сформулировать соответсвующий результат для алгебр Ли.

11. К каким классам относятся алгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$, $\mathfrak{aff}(1)$, $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$?

12. Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.

13. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен.

14. Подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является подалгеброй (идеалом) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}(\mathbb{C})$ является подалгеброй (идеалом) в $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$.

15. $(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))\prime = \mathfrak{g}\prime(\mathbb{C})$. Следовательно, $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ разрешима (нильпотентна).

16. $\operatorname{rad}\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = (\operatorname{rad}\mathfrak{g})(\mathbb{C})$. Следовательно, $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ полупроста.