НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98
Занятие 7

1. Разложение Фиттинга, его свойства.
2. Регулярные элементы алгебры Ли. Теорема о множестве регулярных элементов.
3. Картановская подалгебра. Сопряженность картановских подалгебр.

Разложение Фиттинга

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, а X, Y — ее элементы. Доказать тождества:

$$(adX)^n Y = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m} Y X^m;$$

$$X^n Y = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (adX)^{n-m} Y X^m.$$

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем k; $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$; $\lambda, \mu \in k$. Доказать тождество:

$$(adX - \lambda - \mu)^n [Y, Z] = \sum_{m=0}^{n} C_n^m [(adX - \lambda)^{n-m} Y, (adX - \mu)^m Z].$$

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, определенная в пространстве V. Функция $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется весом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $Xv = \lambda(X)v$, для некоторого $v \in V, v \neq 0$, и всех $X \in \mathfrak{g}$. Пространство

$$V_\lambda = \{v \in V | \exists n \in \mathbb{N} : \ (X - \lambda(X))^n v = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

называется весовым пространством алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3. Если линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то

a) для любого X из $\mathfrak{g}$ пространство $V_{\lambda(X)} := \{v \in V | \exists n \in \mathbb{N} : \ (X - \lambda(X))^n v = 0\}$ инвариантно относительно Y;

b) пространство V разлагается в прямую сумму $V = \sum_\lambda V_\lambda$, где суммирование ведется по конечному множеству линейных форм λ, являющихся весами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — ее нильпотентная подалгебра, $\hat{\mathfrak{n}} = ad(\mathfrak{n})$ — линейная алгебра Ли. Применяя результат задачи 3b) к алгебре $\hat{\mathfrak{n}}$, получим разложение (называемое разложением Фиттинга) $\mathfrak{g} = \sum_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$, где α — произвольный вес, определенный на алгебре $\mathfrak{n}$. **Определение** Веса $\alpha \neq 0$ называются корнями алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а пространства $\mathfrak{g}_\alpha$ — ее корневыми подпространствами.

4. Доказать: а) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$;

b) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0; [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$;

c) $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$.

Определение Элемент H алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется регулярным, если оператор adH имеет минимальную возможную кратность нуля (называемую рангом $\mathfrak{g}$).

5. a) Доказать, что множество регулярных элементов связно, открыто и всюду плотно в $\mathfrak{g}$.

b) Описать регулярные элементы в $\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{aff}(1)$.

6. Пусть H — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}H$ — одномерная нильпотентная подалгебра и $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_\alpha$ — разложение Фиттинга относительно $\mathfrak{n}$. Обозначим $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0, \tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$.

a) Пусть $X_0 \in \mathfrak{g}_0, \varepsilon \in \mathbb{C}, X = H + \varepsilon X_0$. Доказать, что при достаточно малом ε все собственные векторы оператора adX с нулевыми собственными значениями содержатся в подпространстве $\mathfrak{h}$, в частности, $adX|_\mathfrak{h}$ — нильпотентный оператор.

Указание. Рассмотрите многочлен $P(\varepsilon) = \det_{\tilde{\mathfrak{g}}}(ad(H + \varepsilon X_0))$.

b) Доказать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна.

Указание. Рассмотрите многочлен $P_0(\lambda, \varepsilon) = \det_\mathfrak{h}(\lambda - ad(H + \varepsilon X_0))$.

c) Доказать, что $\mathfrak{h}$ — максимальная нильпотентная подалгебра, содержащая H (картановская подалгебра). В разложении Фиттинга относительно $\mathfrak{h}$ имеет место равенство $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

d) Описать картановские подалгебры и корневые разложения для $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{aff}(1)$, $\mathfrak{hei}(3)$.

7. Рассмотрим элемент $Z = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$, где $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда Z принадлежит $\mathfrak{h}$ и на Z определено значение корня $\lambda(Z)$.

a). Доказать, что $\lambda(Z) = r_\lambda \alpha(Z)$, где r_λ — рациональное число (зависящее от λ и α), причем, если $\alpha \neq 0$, то $r_\lambda \neq 0$ при некотором λ.

Указание. Рассмотреть подпрострaство $V = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_{\lambda + k\alpha}$.

b) Доказать, что $tr(adZ)^m = \rho_m \alpha(Z)^m$, где коэффициент ρ_m рационален и $\rho_m \neq 0$ при четном m.