НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98
Занятие 8

1. Определение и основные свойства формы Картана - Киллинга.
2. Критерий Картана разрешимости (полупростоты) алгебры Ли.
3. Свойства корневого разложения полупростой алгебры Ли.

Форма Картана-Киллинга

Определение Формой Картана-Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется билинейная форма на $\mathfrak{g}$, задаваемая формулой:

$$(X, Y) = \mathrm{tr}((adX)(adY)).$$

Если $\mathfrak{h}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, то через $\mathfrak{h}^\perp$ будем обозначать подпространство всех векторов, ортогональных к любому вектору из $\mathfrak{h}$ относительно формы Картана - Киллинга.

1. Доказать следующие свойства формы Картана-Киллинга:
a) $(X, Y) = (Y, X)$ (симметричность),
b) $([X, Y], Z) = (X, [Y, Z])$ (инвариантность),
c) Если $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathfrak{n}$, то $(X, Y)_\mathfrak{n} = (X, Y)_\mathfrak{g}$,
d) Если $\mathfrak{h}$ — идеал, то $\mathfrak{h}^\perp$ — тоже идеал (в частности, $\mathfrak{g}^\perp$ — идеал).

2. Пусть T — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Доказать, что формула

$$\omega(\xi, \eta) = \mathrm{tr}T(\xi)T(\eta)$$

задает билинейную симметрическую $\mathfrak{g}$-инвариантную форму на $\mathfrak{g}$.

Доказать утверждения:

3. Если $\mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
4. Если $\mathfrak{g}^\perp = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ разрешима.
5. Критерий Картана. $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^\perp \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
6. $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Картана-Киллинга невырождена.
7. $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых алгебр Ли.
8. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то все ее дифференцирования внутренние.
9. Если $\mathfrak{g}$ полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$ — разложение Фиттинга, то
a) если $\alpha + \beta \neq 0$,то $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$;
b) ограничение формы Картана-Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено;

c) $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли (максимальная коммутативная подалгебра);

d) $\mathfrak{h}$ диагонализуема (т.е. все операторы $adX, X \in \mathfrak{h}$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду).