НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Весна 98
Занятие 9

1. Свойства системы корней полупростой алгебры Ли.

2. Описание конечномерных неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

3. Унитарный трюк Вейля: полная приводимость конечномерных представлений $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Свойства конечномерных представлений $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Система корней полупростой алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\mathfrak{h}^*,\alpha\neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

— разложение Фиттинга (корневое разложение).

Определение Системой корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется множество

$$\Delta = \{\alpha\in\mathfrak{h}^* | \alpha\neq 0, \mathfrak{g}_\alpha\neq 0\}.$$

1. Описать картановские подалгебры, корневые векторы и системы корней для классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1), \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$. Доказать простоту этих алгебр.

Указание. Рассмотреть реализацию ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе, где матрица сохраняемого ею скалярного произведения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$.

Форма Картана-Киллинга задает естественный изоморфизм между пространствами $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через H^α элемент, двойственный к α , т.е. определяемый соотношением $\alpha(H) = (H^\alpha, H)$ для любого $H\in\mathfrak{h}$.

2. Доказать, что Δ порождает $\mathfrak{h}^*$.
3. Если $H\in\mathfrak{h}, X\in\mathfrak{g}_\alpha, Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $(H,[X,Y]) = (H^\alpha, H)(X,Y)$.
4. Если $X\in\mathfrak{g}_\alpha, Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $[X,Y] = (X,Y)H^\alpha$.
5. Положим $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Доказать, что $\dim(\mathfrak{h}_\alpha) = 1$.

6. Доказать, что существует такой элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$, для которого $\alpha(H_\alpha) = 2$.

7. Доказать что, для любого элемента $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ найдется такой элемент $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, что будут выполняться равенства:

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha; [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha; [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha$$

8. Введем на $\mathfrak{h}^*$ скалярное произведение, индуцированное с $\mathfrak{h}$: $(\alpha, \beta) = (H^\alpha, H^\beta)$. Тогда

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

9. Доказать, что $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in \Delta$.

10. Если $\alpha, c\alpha \in \Delta (c \in C)$, то $c = 1$ или $c = -1$.

11. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, то $\beta(H_\alpha)$ — целое число и $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Delta$.

12. Пусть $\beta \neq \pm\alpha$, p и q — такие наибольшие целые числа, что $\beta - p\alpha \in \Delta$ и $\beta + q\alpha \in \Delta$, и пусть $V = \sum_{k \in Z} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. Тогда

a) $\beta(H_\alpha) = p - q$;

b) V — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) =< X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha >$ размерности $p + q + 1$;

c) отображения $adX_\alpha : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$, где $-p \leq k \leq q - 1$, суть изоморфизмы.

13. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$.