Задачи по квантовым вычислениям

А. Китаев

6/05/98

1) Доказать, что все операторы на одном q-бите, в сочетании с оператором $\Lambda(\sigma_x)$, образуют полный базис.

2) Построить квантовую схему размера $O(n^2)$, реализующую преобразование Фурье на группе $\mathbb{Z}_k$ при $k=2^n$:

$$U_k|x\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{y=0}^{k-1}\exp\left(2\pi\mathrm{i}\frac{xy}{k}\right)|y\rangle$$

(x и y преставлены n битами в двоичной системе). В качестве базиса разрешается использовать любые унитарные операторы на двух q-битах.

3) Построить квантовую схему размера $poly(n\log(1/\delta))$, реализующую преобразование Фурье на группе $\mathbb{Z}_k$ при $k<2^n$ с точностью δ. (Указание: воспользоваться результатом задачи 7).

4) Доказать, что любое физическое преобразование матриц плотности $T:\mathbf{L}(\mathcal{N})\to\mathbf{L}(\mathcal{M})$ можно представить в виде $T=\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(V\cdot V^\dagger)$, то есть $T\rho=\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}(V\rho V^\dagger)$, где $V:\mathcal{N}\to\mathcal{N}\otimes\mathcal{F}$ — изометрическое вложение. (Под “физическим преобразованием” понимается произвольная композиция преобразований вида $\mathrm{Tr}_{\mathcal{F}}$ и $V\cdot V^\dagger$).

5) Доказать, что линейный оператор $T:\mathbf{L}(\mathcal{N})\to\mathbf{L}(\mathcal{M})$ является физическим преобразованием матриц плотности тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

   а) $\mathrm{Tr}(TX)=\mathrm{Tr}\,X$ для любого $X\in\mathbf{L}(\mathcal{N})$.

   б) T является вполне положительным преобразованием. А именно, для любого пространства $\mathcal{G}$, преобразование $T\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{L}(\mathcal{G})}:\mathbf{L}(\mathcal{N}\otimes\mathcal{G})\to\mathbf{L}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{G})$ отображает неотрицательные операторы в неотрицательные.

6) “Квантовая телепортация”. Пусть имеются три q-бита: первый из них находится в произвольном (заранее неизвестном) состоянии ρ, второй и третий — в состоянии $|\xi_{00}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle+|11\rangle\Big)$. Произведем над первыми двумя q-битами измерение, соответствующее ортогональному разложению $\mathbb{B}^{\otimes 2}=(|\xi_{00}\rangle)\oplus(|\xi_{01}\rangle)\oplus(|\xi_{10}\rangle)\oplus(|\xi_{11}\rangle)$, где

$$|\xi_{ab}\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_c(-1)^{bc}|c,\,c\oplus a\rangle.$$

Показать, что используя результат измерения и оставшийся третий q-бит, можно восстановить исходное состояние ρ. Записать всю последовательность действий (измерение и восстановление) в виде квантовой схемы.

7) “Обратимое измерение”. Пусть $W = \sum_{k=1}^{t} \Pi_{\mathcal{L}_k} \otimes V_k$ — измеряющий оператор, $V_k|0\rangle = \sum_{y,z} c_{y,z}(k)|y,z\rangle$. (Имеется ввиду, что операторы V_k действуют на $m+s$ q-бит; первые m q-бит (т. е. y) — “полезный результат”, остальные s q-бит (т. е. z) — “мусор”). Допустим, что V измеряет некоторую функцию $f:\{1,\ldots,t\} \to \{0,1\}^m$ с вероятностью ошибки ϵ, то есть

$$\mathbf{P}(f(k)\,|k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_z |c_{f(k),z}(k)|^2 \ \geq\ 1-\epsilon$$

Построить полиномиальную квантовую схему с использованием W и W^{-1}, реализующую с точностью $O(\epsilon^{1/2})$ новый измеряющий оператор

$$U \ =\ \sum_{k=1}^{t} \Pi_{\mathcal{L}_k} \otimes Q_{f(k)}\,, \qquad \text{где} \qquad Q_v|y\rangle \ =\ |y \oplus v\rangle.$$

(Разрешается “брать напрокат” дополнительные q-биты).

8) Построить симплектический квантовый код типа $(5,2)$, исправляющий одну ошибку.

9) Доказать, что не существует квантового кода типа $(4,2)$, исправляющего одну ошибку.