В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 2

Теория препятствий

Теория препятствий занимается двумя основными задачами (тесно друг с другом связанными).

Первая задача такова. Пусть в топологическом пространстве X задано подпространство A и на A задано непрерывное отображение в Y:

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \cup & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

Можно ли f продолжить до непрерывного отображения всего X? Какие существуют препятствия к продолжению?

Более популярна другая задача. Пусть задано расслоение $E \to B$. Существует ли сечение этого расслоения? Сколько имеется сечений?

Вариант второй задачи: сечение уже задано на $A \subset B$. Спрашивается, можно ли его продолжить до непрерывного сечения над всем B. Первая задача является частным случаем этой задачи. Действительно, рассмотрим тривиальное расслоение $X \times Y \to X$ и пусть $A \subset X$. Сечения тривиального расслоения — это в точности отображения $X \to Y$.

Мы уже обсуждали следующую задачу. Пусть $TM \to M$ — касательное расслоение. Существует ли векторное поле на M, всюду не обращающееся в нуль? На языке теории препятствий это означает, что мы выбрасываем нулевое сечение, т.е. рассматриваем расслоение $TM \setminus M \to M$, и спрашиваем, есть ли у этого расслоения сечение.

Для замкнутого многообразия M требуемое сечение существует тогда и только тогда, когда $\chi(M) = 0$. Таким образом, в этом случае препятствием к построению сечения является эйлерова характеристика.

Сначала мы займемся первой задачей о продолжении отображения. Будем предполагать, что X — CW-комплекс, а пространство Y гомотопически просто, т.е. фундаментальная группа $\pi_1(Y)$ тривиально действует на всех группах $\pi_n(Y)$. Пусть X^n — n-мерный остов. Предположим, что задано отображение $X^n \to Y$, и мы хотим его продолжить на X^{n+1}. Препятствие к продолжению можно рассматривать по отдельности для каждой $(n+1)$-мерной клетки ε^{n+1}. Пусть клетке ε^{n+1} соответствует характеристическое отображение $\bar{D}^{n+1} \xrightarrow{\varphi} X$, где $\overset{\circ}{D}{}^{n+1} \approx \varepsilon^{n+1}$ и $\varphi(\partial \bar{D}^{n+1}) \subset X^n$. Тогда возникает сквозное отображение $S^n = \partial D^{n+1} \xrightarrow{f\circ\varphi} Y$. При этом сфероид $f\circ\varphi$ можно рассматривать как элемент $\pi_n(Y)$ (здесь мы пользуемся гомотопической простотой пространства Y — она позволяет не заботиться о том, переходит ли отмеченная точка в отмеченную). Продолжение отображения возможно тогда и только тогда, когда этот сфероид представляет нулевой гомотопический класс.

Итак, продолжение возможно тогда и только тогда, когда для любой клетки ε_α^{n+1} соответствующий сфероид является нулевым элементом гомотопической группы $\pi_n(Y)$.

Если мы рассмотрим все $(n+1)$-мерные клетки, то отображение f определит *препятствующий элемент* (коцепь) $c_f \in C^{n+1}(X, \pi_n(Y))$, где $C^i(X, G)$ — группа клеточных i-мерных коцепей X с коэффициентами в G. Предыдущее условие можно сформулировать так: f допускает продолжение на X^{n+1} тогда и только тогда, когда эта коцепь равна 0.

Свойства коцепи c_f

1) Коцепь c_f является коциклом, т.е. $\delta c_f = 0 \in C^{n+2}(X, \pi_n(Y))$.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим группу $C_{n+2}(X)$, порожденную всеми $(n+2)$-мерными клетками X. В силу относительной теоремы Гуревича (теоремы 6 предыдущей лекции)

$$C_{n+2}(X) = H_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) = \pi_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}).$$

По построению, значение коцикла δc_f на любом элементе группы $C_{n+2}(X)$ равна его образу при сквозном отображении

$$C_{n+2}(X) \equiv \pi_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X^n) \xrightarrow{f} \pi_n(Y)$$

тождественно равна нулю. Но первый дифференциал можно представить в виде композиции следующих двух отображений:

$$\pi_{n+2}(X^{n+2}, X^{n+1}) \to \pi_{n+1}(X^{n+1}) \to \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n).$$

В результате возникают два последовательных гомоморфизма из точной последовательности пары:

$$\pi_{n+1}(X^{n+1}) \to \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \to \pi_{n+1}(X^{n+1}, X^n).$$

Их композиция равна нулю.

В этом доказательстве есть небольшой обман: в теореме Гуревича требуется односвязность всех участвующих пространств, которая в нашем случае эквивалентна односвязности X. Но те же самые рассуждения можно провести не для исходного пространства X, а для его универсальной накрывающей с очевидным образом поднятыми клеточным разбиением и отображением $f|_{X^n}$. А если поднятие препятствия нулевое, то и само препятствие нулевое.

2) Пусть $C_f \in H^{n+1}(X, \pi_n(Y))$ — класс когомологий, содержащий коцикл c_f. Тогда равенство $C_f = 0$ эквивалентно тому, что отображение f можно продолжить на X^{n+1}, предварительно изменив его лишь на $X^n \setminus X^{n-1}$.

Для доказательства этого утверждения понадобится еще одно понятие: различающая коцепь. Пусть есть два отображения $f, g : X^n \to Y$, совпадающие на X^{n-1}. Тогда можно построить коцепь $d_{f,g} \in C^n(X, \pi_n(Y))$ следующим образом. Пусть в X есть какая-то клетка, и $\varphi : D^n \to X$ — характеристическое отображение для этой клетки. Из двух экземпляров D^n (северного полушария и южного) склеим сферу S^n. Рассмотрим отображение $S^n \to Y$, которое на северном полушарии совпадает с $f \circ \varphi$, а на южном — с $g \circ \varphi$ (на общей границе полушарий отображения f и g по условию совпадают).

Лемма 1 (о реализации) *Для любого отображения $f : X^n \to Y$ и для любого элемента $b \in C^n(X, \pi_n(Y))$ существует такое отображение $g : X^n \to Y$, что $d_{f,g} = b$.*

В самом деле, возьмем произвольную клетку в X. Ей элемент b сопоставляет некоторый класс сфероидов в Y. На этой клетке почти всюду сохраним отображение f, а в малом внутреннем диске переопределим отображение так, чтобы новое отображение вместе с отображением f (определенные на двух экземплярах этого диска, склеенных по границе) принадлежало требуемому классу сфероидов в $\pi_n(Y)$ (тому, который элемент b сопоставляет рассматриваемой клетке).

Сделаем еще одно замечание: если отображения f и g совпадают на X^{n-1}, то $c_f - c_g = -\delta d_{f,g}$. Это доказывается простым раскрытием определений.

Из леммы о реализации и этого замечания вытекает свойство 2). Действительно, мы хотим подобрать g так, что $c_g = 0 = c_f + \delta d_{f,g}$. Но $c_f = \delta\alpha$ для некоторого α, поэтому $c_g = \delta(\alpha + d_{f,g})$. Подбираем g так, что $d_{f,g} = -\alpha$. Это отображение g продолжается на X^{n+1}. Обратная импликация доказывается аналогично.

Приложение к пространствам $K(\pi, n)$

Докажем с помощью теории препятствий, что все клеточные пространства типа $K(\pi, n)$ с данными π и n гомотопически эквивалентны между собой.

Можно считать, что у X и X' нет клеток (положительной) размерности меньше n (такие клетки можно убить, заменяя $(n-1)$-связное клеточное пространство на гомотопически эквивалентное). Фиксируем изоморфизм $\pi_n(X) \to \pi_n(X')$. Отображение $X \to X'$ будем строить следующим образом. Каждой n-мерной клетке в X соответствует некоторый сфероид в $\pi_n(X)$. Отобразим ее так, чтобы ее образ реализовывал образ этого сфероида в $\pi_n(X')$. Препятствие к продолжению отображения в размерности n отсутствует по построению (из-за изоморфизма $\pi_n(X) \to \pi_n(X')$). А в старших размерностях препятствия всегда нулевые, потому что все старшие гомотопические группы пространства X'нулевые. Так получаем отображение, индуцирующее изоморфизм всех гомотопических групп.

Для произвольного топологического пространства X имеется естественное отображение $\Pi(X, K(\pi, n)) \to H^n(X, \pi)$ (при $n = 1$ мы считаем, что группа π абелева). Оно устроено следующим образом. Группа $H^n(K(\pi, n), \pi)$ содержит замечательный элемент τ (тавтологический класс). Напомним, что $K(\pi, n)$ — клеточное пространство с клетками размерности $\geq n$, а каждая его n-мерная клетка представляет некоторый элемент группы π. Так вот, элемент τ и сопоставляет этой клетке тот элемент группы π, который она представляет.

Отображение $X \to K(\pi, n)$ индуцирует гомоморфизм $H^n(K(\pi, n), \pi) \to H^n(X, \pi)$. При этом гомоморфизме элемент τ переходит в некоторый элемент группы $H^n(X, \pi)$. Этот элемент мы и сопоставляем отображению $X \to K(\pi, n)$.

Предложение 1 *Если X — клеточное пространство, то это отображение*

$$\Pi(X, K(\pi, n)) \to H^n(X, \pi)$$

— изоморфизм.

В самом деле, пусть есть какой-то класс $a \in H^n(X, \pi)$. Будем строить отображение $f : X \to K(\pi, n)$ так, чтобы оно индуцировало именно класс a, т.е. $f^*(\tau) = a$. Все клетки размерности $< n$ отображаются в отмеченную точку комплекса типа $K(\pi, n)$. В размерности n любую клетку ε отображаем в сфероид, реализующий класс $a(\varepsilon) \in \pi \equiv \pi_n(K(\pi, n), \pi)$, а для дальнейшего продолжения препятствий нет. Так доказывается эпиморфность. Для доказательства мономорфности нужно построить гомотопию, соединяющую любые два отображения, индуцирующие класс a. Опять–таки с помощью описанной выше теории доказывается, что нет никаких препятствий к существованию такой гомотопии.

Займемся теперь второй задачей: дано расслоение $p : E \to B$ и мы хотим построить сечение индукцией по остовам (или понять, почему такого сечения нет). Мы будем предполагать, что слой F гомотопически прост и само расслоение тоже гомотопически просто, т.е. $\pi_1(B)$ тривиально действует на $\pi_n(F)$. (От второго условия можно с небольшим трудом избавиться, а от первого условия избавиться гораздо сложнее: мы не будем этим заниматься.)

Снова можно построить практически ту же самую теорию. Рассматриваем фильтрацию остовами: $B^n \subset B^{n+1}$. Для любой $(n+1)$-мерной клетки в B соответствующее характеристическое отображение $\phi : \bar{D}^{n+1} \to B$ индуцирует над $\bar{D}^{n+1}$ расслоение с тем же самым слоем F. (Напомним, что пространство индуцированного расслоения — это множество таких пар $(s, e) \in \bar{D}^{n+1} \times E$, что $\phi(s) = p(e)$, а его проекция на $\bar{D}^{n+1}$ — это забывание вторых элементов e таких пар.) По теореме Фельдбау, это расслоение над $\bar{D}^{n+1}$ тривиально, то есть эквивалентно расслоению $F \times \bar{D}^{n+1} \to \bar{D}^{n+1}$. Если мы имеем сечение χ нашего расслоения над B^n, то задано и сечение индуцированного расслоения над границей S^n шара $\bar{D}^{n+1}$: любой точке $s \in \partial\bar{D}^{n+1}$ оно ставит в соответствие точку $\chi(\phi(s))$. В силу тривиальности последнего расслоения, это сечение есть просто отображение $S^n \to F$, в частности оно определяет элемент группы $\pi_n(F)$. (Здесь мы используем простоту расслоения, то есть возможность отождествить группы π_n для всех его слоев.) Условие продолжимости сечения с B^n на B^{n+1} заключается в том, что этот элемент в $\pi_n(F)$ тривиален для любой

$(n+1)$-мерной клетки. Совокупность таких элементов, сопоставленных всем таким клеткам, есть некоторый элемент c_f группы $C^{n+1}(B, \pi_n(F))$ — *препятствующая коцепь*. Он обладает теми же самыми свойствами что и в случае отображений (т.е. сечений тривиальных расслоений):

1) c_f — коцикл;

2) тривиальность класса $C_f = \{c_f\} \in H^{n+1}(B, \pi_n(F))$ эквивалентна тому, что сечение можно продолжить на B^{n+1}, изменив его лишь на $B^{n+1} \setminus B^n$.

Характеристический класс расслоения

Пусть $\pi_0(F) = \pi_1(F) = \cdots = \pi_{n-1}(F) = 0$, $\pi_n(F) \neq 0$. Тогда первый препятствующий элемент к построению сечения лежит в группе $H^{n+1}(B, \pi_n(F))$. Этот элемент $\{c_f\}$ называется *первым характеристическим классом* расслоения.

Его мы уже в некотором виде проходили. Напишем спектральную последовательность расслоения. У нее есть ненулевая строка $\{E^2_{p,0} \equiv H_p(B)\}$, затем идет $n-1$ пустая строка $E^2_{p,i} \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и далее вообще говоря непустые строки, нижняя из которых начинается с члена $E^2_{0,n} \simeq H_n(F) \simeq \pi_n(F)$. Все последующие дифференциалы, действующие из клеток $E_{p,0}$ нижней строки с $p \leq n$, попадают в нулевую область и следовательно тривиальны. Первый же дифференциал, который может быть ненулевым, — это трансгрессия $\partial^{n+1} : E^{n+1}_{n+1,0} \to E^{n+1}_{0,n}$, или, что то же самое,

$$H_{n+1}(B) \to H_n(F) = \pi_n(F). \tag{1}$$

Итак, по нашему расслоению мы построили два объекта: первый характеристический класс $c_f \in H^{n+1}(B, H_n(F))$ и трансгрессию (1), т.е. некоторый элемент очень похожей группы $Hom(H_{n+1}(B), H_n(F))$.

Задача 1 *До какой степени это одно и то же? Как при помощи спектральных последовательностей определить в точности характеристический класс?*

В случае, если наше расслоение непростое (но слои его все же гомотопически просты), характеристический класс строится точно так же: он будет элементом группы $H^{n+1}(B, \{H_n(F)\})$, где $\{H_n(F)\}$ — локальная система групп, ассоциированная с нашим расслоением.

Литература

Фукс–Фоменко, Курс гомотопической топологии, § 14