В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 3

Характеристические классы

Первое препятствие к построению сечения расслоения $E \to B$ со слоем F выглядит следующим образом. Пусть $\pi_0(F) = \pi_1(F) = \cdots = \pi_{n-1}(F) = 0$, $\pi_n(F) \neq 0$ и расслоение гомотопически просто. Тогда первый препятствующий элемент к построению сечения лежит в группе $H^{n+1}(B, \pi_n(F))$.

С другой стороны, если написать спектральную последовательность расслоения, то получим первый нетривиальный дифференциал — это элемент группы $Hom(H_{n+1}(B), H_n(F))$. Эта группа похожа на группу $H^{n+1}(B, \pi_n(F))$. Например, если коэффициенты берутся из поля, то эти группы изоморфны. Элемент из группы Hom тоже можно интерпретировать как препятствие к построению сечения.

Чтобы совпадение двух подходов было полным, можно рассмотреть когомологии с коэффициентами $\pi_n(F)$. Тогда трансгрессия дает гомоморфизм $H^n(F, \pi_n(F)) \to H^{n+1}(B, \pi_n(F))$. В $H^n(F, \pi_n(F))$ есть тавтологический элемент: его значение на любом цикле (в силу теоремы Гуревича представляемом сфероидом) равно классу этого сфероида. Образ этого элемента в $H^{n+1}(B, \pi_n(F))$ совпадает с описанным выше препятствующим элементом.

Если расслоение не гомотопически просто, то нужно рассматривать гомологии с коэффициентами в локальной системе: $H^{n+1}(B, \{\pi_n(F)\})$.

Характеристические классы векторных расслоений.

Обсудим теперь более подробно векторные расслоения.

Локально тривиальное расслоение $E \to B$ со слоем F называется векторным, если во всех его слоях имеется структура векторного пространства. При этом стандартные операции векторного пространства в слоях должны непрерывно меняться от слоя к слою. Это означает следующее. Для двух непрерывных сечений над любым открытым подмножеством в базе можно поточечно определить их сумму. Она должна тоже быть непрерывным сечением. Аналогичное свойство должно выполняться для умножения на число.

Векторное расслоение называется вещественным или комплексным в зависимости от того, векторными пространствами над каким полем являются его слои; часто рассматривают также кватернионные векторные расслоения.

Самые важные векторные расслоения — касательное, кокасательное, расслоение k-струй функций или отображений в R^n, тензорные расслоения.

Для двух векторных расслоений с одной и той же базой можно построить их прямое произведение, тензорное произведение, Hom. Можно также построить фактор расслоения по его подрасслоению. Результаты всех этих операций вновь будут векторными расслоениями.

Простейшее нетривиальное векторное расслоение — это расслоение листа Мёбиуса над S^1 со слоем R^1: при обходе вдоль базы ориентация его слоев превращается в противоположную.

Векторное расслоение называется *ориентируемым*, если существует одновременная ориентация всех его слоев, непрерывно зависящая от слоя. Комплексные и кватернионные расслоения автоматически являются ориентируемыми.

Одна из стандартных задач теории векторных расслоений, решаемая с помощью характеристических классов — это задача о всюду ненулевых сечениях.

Например, всюду ненулевое сечение касательного расслоения — это векторное поля без особых точек. Для замкнутого многообразия M такое поле существует тогда и только тогда, когда $\chi(M) = 0$. Можно также рассматривать задачу о построении двух, трех и т.д. линейно независимых в каждой точке векторных полей. Если на n-мерном многообразии можно построить n линейно независимых векторных полей, то такое многообразие называют *параллелизуемым.*

Объекты, различающие неизоморфные расслоения, обычно определяются как классы когомологий базы расслоения; они называются характеристическими классами.

Один пример такого класса мы фактически уже знаем. Действительно, векторному расслоению $E \xrightarrow{F} B$ можно сопоставить сферическое расслоение $E' \xrightarrow{S^{n-1}} B$, где $n = \dim F$. Его слой над точкой $b \in B$ — это пространство всех лучей в слое над b исходного расслоения, выходящих из нулевой точки слоя. (Эквивалентное определение: немного ниже мы покажем, что можно ввести евклидову структуру во всех слоях расслоения E, непрерывно зависящую от слоев. Тогда слой расслоения E' можно определить как множество векторов единичной длины в слое E.)

Первое препятствие к построению сечения сферического расслоения принадлежит группе $H^n(B, \{\mathbf{Z}\})$, где $\mathbf{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1})$. В рассматриваемой ситуации простота расслоения эквивалентна его ориентируемости. Если расслоение ориентируемо, то локальная система $\{\mathbf{Z}\}$ тривиальна, и первое препятствие к построению сечения лежит в $H^n(B, \mathbf{Z})$. Его называют *эйлеровым классом* ориентированного расслоения. (Для неориентированного расслоения тоже можно определить эйлеров класс. Он будет элементом $H^n(B, \{\mathbf{Z}\})$.)

Конечно, любое тривиальное расслоение имеет сечение, поэтому расслоение с нетривиальным эйлеровым классом нетривиально. Более общим образом, если два расслоения имеют разные эйлеровы классы, то они неизоморфны.

Если B — гладкое ориентируемое многообразие без края, и рассматриваемое расслоение E — его касательное расслоение, то $H^n(B, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, и эйлеров класс характеризуется единственным числом — своим значением на фундаментальном цикле многообразия. Это число в точности равно эйлеровой характеристике многообразия.

Мы знаем еще один характеристический класс, позволяющий утверждать, что если он нетривиален, то и расслоение нетривиально. Это — класс, отвечающий за ориентацию. Он лежит в $H^1(B, \mathbf{Z}_2)$ и сопоставляет каждому замкнутому пути элемент группы $\mathbf{Z}_2$: если путь сохраняет ориентацию, то ему сопоставляется 0, а если изменяет — то 1. Этот характеристический класс называют первым классом Штифеля — Уитни и обозначают w_1.

Для n-мерного расслоения n-й класс Штифеля — Уитни определяется как эйлеров класс, приведенный $\mathrm{mod} 2$. Этот класс обозначают через w_n. Он определен и для неориентируемого расслоения и лежит в $H^n(B, \mathbf{Z}_2)$.

Кроме этих двух классов существуют и другие классы Штифеля — Уитни. Мы сначала сформулируем их свойства, а существование и единственность характеристических классов, обладающих этими свойствами, докажем позже.

Пусть $E \xrightarrow{\mathbf{R}^n} B$ — n-мерное векторное расслоение, причем B — связное клеточное пространство. Тогда имеется набор классов когомологий $w_0, w_1, \ldots, w_n$, $w_{n+1}, \ldots$, где $w_i \in H^i(B, \mathbf{Z}_2)$. При этом $w_0 = 1$ (группа H^0 состоит из двух элементов — тривиального и нетривиального; имеется в виду, что w_0 равен нетривиальному элементу). Кроме того, $w_i = 0$ при $i > n$.

Напомним понятие индуцированного расслоения. Пусть имеется расслоение

$E \to B$ и отображение $B' \xrightarrow{\varphi} B$:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\varphi} & B. \end{array}$$

Тогда над B' возникает расслоение $E' \to B'$, где

$$E' = \{(b', \xi) \in B' \times E | \varphi(b') = p(\xi)\}.$$

Проекция имеет вид $(b', \xi) \mapsto b' \in B'$. Слой над b' канонически отождествляется со слоем расслоения E над $\varphi(b')$.

Свойство (естественность при индуцировании):

$$w_i(E') = \varphi^*(w_i(E)).$$

Для двух векторных расслоений E и G над одной и той же базой можно определить их прямую сумму $E \oplus G$ (сумму Уитни), взяв прямые суммы слоев.

Формула Уитни для произведений: для любого $i \geq 0$,

$$w_i(E \oplus G) = w_i(E) + w_{i-1}(E)w_1(G) + w_{i-2}(E)w_2(G) + \cdots + w_1(E)w_{i-1}(G) + w_i(G).$$

Здесь имеется в виду когомологическое умножение.

Запись формулы Уитни можно упростить, если ввести полный, или тотальный, класс Штифеля — Уитни

$$w(E) = w_0(E) + w_1(E) + w_2(E) + \cdots + w_n(E) \in H^*(B, \mathbf{Z}_2).$$

Для полных классов формула Уитни записывается так: $w(E \oplus G) = w(E)w(G)$.

Всеми указанными свойствами обладает полный класс, тождественно равный 1 для всех расслоений. Чтобы его исключить, наложим еще условие нетривиальности: для расслоения листа Мёбиуса над окружностью $w_1 \neq 0$.

Утверждается, что такое правило сопоставления расслоению классов когомологий существует и единственно. Выведем из этого утверждения некоторые следствия.

1. Изоморфным расслоениям (над одной базой) соответствуют одинаковые классы Штифеля — Уитни. Это следует из естественности.

1,5. Одномерное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$.

2. Если расслоение E тривиально, то $w(E) = 1 \in H^*(B, \mathbf{Z}_2)$. В самом деле, расслоение E можно получить операцией индуцирования из тривиального расслоения над точкой. (Другое доказательство можно получить с помощью 1,5 и расщепления тривиального расслоения в сумму тривиальных одномерных.)

3. Если существует всюду ненулевое сечение, то $w_n = 0$. Действительно, тогда расслоение можно представить в виде прямой суммы тривиального расслоения, соответствующего сечению, и его *ортогонального дополнения*. Дальше нужно воспользоваться формулой Уитни.

Ортогональное дополнение, используемое в этом рассуждении, определяется при помощи следующего дополнительного построения.

Евклидовой структурой на векторном расслоении E называется непрерывная функция $E \to \mathbf{R}$, в ограничении на любой слой нашего расслоения являющаяся евклидовой структурой.

Предложение 1 *Если база векторного расслоения — клеточное пространство, то на этом расслоении можно ввести евклидову структуру.*

Более того, достаточно даже считать, что база — любое паракомпактное пространство, т.е. она удовлетворяет следующему свойству.

Определение. Топологическое пространство X паракомпактно, если оно хаусдорфово и в любое его открытое покрытие можно вписать *локально конечное* открытое покрытие.

Примерами паракомпактных пространств являются компактные пространства, подмножества евклидовых пространств (в частности конечномерные многообразия), CW-комплексы.

Такие пространства важны, поскольку на них можно эффективно использовать разбиения единицы. Если дано локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X, то подчиненным ему разбиением единицы называется набор непрерывных функций $f_\alpha : X \to \mathbf{R}$, обладающих следующими свойствами: они принимают только неотрицательные значения, f_α тождественно равна нулю вне U_α и $\sum f_\alpha \equiv 1$. Последняя сумма всюду имеет смысл в силу условия локальной конечности.

Такое разбиение всегда существует; более того, если наше паракомпактное пространство является гладким многообразием, то его можно реализовать гладкими же функциями f_α.

С помощью этих понятий можно построить евклидову структуру на векторном расслоении с клеточной базой.

Покроем базу окрестностями, над которыми расслоение тривиализуется, причем можно считать что это покрытие — локально конечно, и определим разбиение единицы $\{f_\alpha\}$, подчиненное этому покрытию.

Пользуясь локальной тривиальностью, над каждой координатной окрестностью введем евклидову структуру η_α, поднимем функцию f_α до функции f^*_α на пространстве расслоения и рассмотрим функцию $\sum f^*_\alpha \eta_\alpha$. Это и есть требуемая евклидова структура. (Здесь использовано то, что множество всех положительно определенных квадратичных форм на линейном пространстве выпукло.)

Используя евклидову структуру, всегда можно заменять факторрасслоение E/E' на изоморфное ему подрасслоение $E'' \subset E$, слои которого — это ортогональные дополнения к слоям E' в соответствующих слоях E.

3'. Если существует k всюду линейно независимых сечений, то $w_n = 0$, $w_{n-1} = 0, \ldots, w_{n-k+1} = 0$. Действительно, расслоение распадается на k-мерное тривиальное расслоение и его $(n-k)$-мерное дополнение.

Это дает способ вычисления классов Штифеля — Уитни с помощью сечений. Пусть есть гладкое многообразие M^n и гладкое расслоение над ним. Возьмем k сечений общего положения. Рассмотрим в M^n те точки, где эти сечения линейно зависимы. Это множество будет $(k-1)$-мерным подмножеством в M^n (вообще говоря, с особенностями). Для этого множества корректно определен двойственный по Пуанкаре класс когомологий — индекс пересечения с этим подмножеством. Это как раз и есть $(n-k+1)$-й класс Штифеля — Уитни.

Еще одно, более общее, описание классов Штифеля–Уитни над почти произвольной базой, дается с помощью ассоциированного расслоения реперов.

Пусть $V(n,k)$ — многообразие Штифеля, т.е. множество независимых k-реперов в $\mathbf{R}^n$. Для n-мерного векторного расслоения можно построить ассоциированное расслоение с той же базой и слоем $V(n,k)$. А именно, для каждого слоя рассмотрим множество k-реперов в этом слое.

Для исходного векторного расслоения существует k линейно независимых сечений, тогда и только тогда, когда существует одно сечение ассоциированного расслоения Штифеля. Первое препятствие к построению этого сечения — элемент $H^{x+1}(B, \pi_x(V(n,k)))$, где x — размерность первой нетривиальной гомотопической группы $V(n,k)$.

Лемма 1 *$\pi_i(V(n,k)) = 0$ при $i < n-k$.*

Группа $\pi_{n-k}(V(n,k))$ изоморфна $\mathbf{Z}$, если $k = 1$ или $n-k$. В остальных случаях $\pi_{n-k}(V(n,k)) \simeq \mathbf{Z}_2$.

Таким образом, $x = n-k$ и препятствие лежит в $H^{n-k+1}(B, \{\pi_{n-k}(V(n,k))\})$. Если группа $\pi_{n-k}(V(n,k))$ изоморфна $\mathbf{Z}_2$, то соответствующая локальная система тривиальна и изоморфна $\mathbf{Z}_2$, так что мы получаем некоторый элемент группы $H^{n-k+1}(B, \mathbf{Z}_2)$. Это — в точности класс Штифеля — Уитни. Если же $\pi_{n-k}(V(n,k))$ изоморфна $\mathbf{Z}$, то можно, конечно, слегка помучиться, рассматривая когомологии с коэффициентами в вообще говоря нетривиальной локальной системе. Однако обычно этим занимаются лишь при $k = 1$ (исследуя эйлеров класс). При общих же k вместо этого слой $\mathbf{Z}$ нашей локальной системы приводится по модулю двойки, после чего она вновь становится тривиальной, и соответствующий характеристический класс расслоения реперов (приведенный, строго говоря, по модулю двойки) — это снова класс Штифеля — Уитни.

Наконец, еще одно свойство классов Штифеля–Уитни.

4. Векторное расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$.