В. А. Васильев
Топология
Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1. Лекция 5

Классифицирующие пространства для топологических групп обладают следующим свойством. Пусть G_1 и G_2 — топологические группы, $G_1 \to G_2$ — непрерывный гомоморфизм. Тогда ему соответствует непрерывное отображение $BG_1 \to BG_2$, причем оно определено однозначно с точностью до гомотопии. Это сопоставление сохраняет (на гомотопическом уровне) свойства гомоморфизмов: например, отображение $BG_1 \to BG_3$, соответствующее композиции гомоморфизмов $G_1 \to G_2$ и $G_2 \to G_3$, гомотопно композиции отображений $BG_1 \to BG_2$ и $BG_2 \to BG_3$, ссопоставленных этим гомоморфизмам. Поэтому говорят, что это сопоставление — *функтор* из категории топологических групп в категорию топологических пространств и их непрерывных отображений, рассматриваемых с точностью до гомотопий.

Пользуясь изложенной на предыдущих лекциях наукой, уже можно вычислять классы Штифеля — Уитни для некоторых важных расслоений, прежде всего для касательных расслоений. Вычислим, например, $w(TS^n)$. Гомологии сферы нетривиальны лишь в размерностях 0 и n, поэтому нетривиальным может быть лишь класс $w_n(TS^n)$. Чтобы убедиться, что $w_n(TS^n) = 0$, рассмотрим вложение $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Это вложение индуцирует на сфере тривиальное $n+1$-мерное расслоение $\mathbf{R}^{n+1}$, которое является прямой суммой одномерного нормального расслоения $\mathbf{n}$ и касательного расслоения τ (расслоение $\mathbf{n}$ тривиально). По формуле Уитни получаем:

$$w(\mathbf{R}^n) = w(\tau)w(\mathbf{n}).$$

Но $w(\mathbf{R}^n) = 1$ и $w(\mathbf{n}) = 1$, поэтому $w(\tau) = 1$.

Менее тривиальное упражнение — вычисление $w(T\mathbf{R}P^n)$.

Задача 1. *Доказать, что $w(T\mathbf{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, где α — мультипликативная образующая кольца $H^*(\mathbf{R}P^n, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[\alpha]/\alpha^{n+1}$.*

Из этого, например, следует, что $w(T\mathbf{R}P^n) = 1$ тогда и только тогда, когда $n+1 = 2^k$. В частности, если $n+1 \neq 2^k$, то касательное расслоение к $\mathbf{R}P^n$ не тривиально, т.е. многообразие $\mathbf{R}P^n$ не параллелезуемо. Гораздо более сложные рассуждения показывают, что многообразие $\mathbf{R}P^n$ параллелезуемо тогда и только тогда, когда $n = 1, 3, 7$.

Очень легко вычислять классы Штифеля — Уитни для групп Ли. Любая группа Ли параллелезуема, поэтому если G — группа Ли, то $w(G) = 1$. Например, на пространствах $\mathbf{R}R^1$ и $\mathbf{R}P^3$ из предыдущего примера можно ввести структуру группы Ли. На $\mathbf{R}P^7$ такой структеры нет.

Обратный класс Штифеля — Уитни

Рассмотрим класс Штифеля — Уитни $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, где $w_i \in H^i(B, \mathbf{Z}_2) \subset H^*(B, \mathbf{Z}_2)$. Несложно доказать, что для него есть обратный элемент к кольце когомологий.

Лемма 1. *Для любого связного топологического пространства B множество всех последовательностей вида $\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$, где $\alpha_i \in H^i(B, G)$, образует группу по умножению.*

Нужно лишь доказать существование обратного элемента $\beta = 1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots$. Равенство

$$(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots)(1 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n + \cdots) = 1$$

эквивалентно последовательности равенств $\alpha_1 + \beta_1 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2 = 0$,... Из этих равенств можно последовательно выразить β_1, β_2,...

Для конечномерной базы получаются конечные последовательности. Если α — полный класс Штифеля–Уитни некоторого векторного расслоения над B, то обратный элемент β называется обратным классом Штифеля–Уитни этого расслоения.

В случае, когда база — конечномерное пространство, этот обратный класс также является классом Штифеля — Уитни некоторого векторного расслоения над той же базой. Это расслоение в некотором смысле обратно исходному расслоению.

Теорема 1. *Пусть база B — конечномерный клеточный комплекс. Тогда для любого векторного расслоения ξ над B существует такое векторное расслоение η над B, что $\xi \oplus \eta \sim \mathbf{R}^N$ — тривиальное расслоение.*

На прошлой лекции мы убедились, что ξ можно индуцировать из тавтологического расслоения над $G_n(\mathbf{R}^\infty) = \lim G_n(\mathbf{R}^N)$ некоторым отображением $B \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$. Для конечномерной базы B здесь можно ограничиться отображением $B \to G_n(\mathbf{R}^N)$ с некоторым конечным N: бесконечномерный грассманиан в таком случае не нужен. Действительно, для любого натурального

d существует такое $N(d)$, что все клетки Шуберта стабильного грассманиана $G_n(\mathbf{R}^\infty)$, имеющие размерность не выше d, лежат в некотором нестабильном грассманиане $G_n(\mathbf{R}^{N(d)}) \subset G_n(\mathbf{R}^\infty)$. Поэтому по теореме о клеточной аппроксимации отображение $B \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$ гомотопно некоторому отображению $\phi : B \to G_n(\mathbf{R}^n)$ в конечномерный грассманиан.

Над $G_n(\mathbf{R}^N$ помимо тавтологического расслоения есть $(N-n)$-мерное расслоение, состоящее из ортогональных дополнений слоев этого расслоения. Оно задает отождествление $G_n(\mathbf{R}^n) \leftrightarrow G_n(\mathbf{R}^{N-n})$. Эти два расслоения в сумме дают тривиальное расслоение. Расслоение над B, индуцированное тем же самым отображением ϕ из ортогонального дополнения к тавтологическому расслоению над $G_n(\mathbf{R}^N)$, и есть искомое.

Обратное расслоение η определено не однозначно. Например, в предыдущей конструкции не фиксировано число N, поэтому можно изменять его размерность. Но все расслоения, обратные к данному, *стабильно эквивалентны* между собой.

Стабильная эквивалентность расслоений

Расслоения ξ_1 и ξ_2 над базой B называют стабильно эквивалентными, если существуют такие числа n и m, что $\xi_1 \oplus \mathbf{R}^n \sim \xi_2 \oplus \mathbf{R}^m$ (здесь подразумевается обычная эквивалентность расслоений).

Например, касательное расслоение к S^n тривиально лишь при $n = 1, 3, 7$. Но это расслоение стабильно тривиально при всех n.

Операция обращения расслоения определена однозначно с точностью до стабильной эквивалентности.

Пусть задано топологическое пространство B. Рассмотрим все классы стабильной эквивалентности векторных расслоений над B. Если B конечномерно, то в результате получим группу относительно операции прямой суммы. Эту группу обозначают $K_{\mathbf{R}}(B)$ (K-функтор). На $K_{\mathbf{R}}(B)$ есть еще много дополнительных структур: тензорное произведение; поведение при отображении пространств.

Отображение $B_1 \to B_2$ индуцирует отображение $K_{\mathbf{R}}(B_1) \leftarrow K_{\mathbf{R}}(B_2)$, т.е. K-функтор ведет себя как теория когомологий. Он обладает еще и некоторыми другими свойствами когомологий.

Утверждение 1. *Если B — конечномерный клеточный комплекс, то существует естественное преобразование $K_{\mathbf{R}}(B) \to H^*(B, \mathbf{Z}_2)$, а именно: расслоению сопоставляется его полный класс Штифеля — Уитни, причем результат зависит только от класса стабильной эквивалентности этого расслоения..*

Приложения классов Штифеля — Уитни

Препятствия к иммерсируемости

Напомним, что отображение $M^m \to N^n$ называют иммерсией, если его матрица Якоби во всех точках имеет ранг m.

Теорема 2. *Пусть $(w(TM^m))^{-1} = 1 + \beta_1 + \cdots + \beta_k$, где $\beta_k \neq 0$. Тогда если существует иммерсия $\phi : M^m \to \mathbf{R}^n$, то $k \leq n - m$.*

Действительно, в этом случае $(w(TM^m))^{-1}$ является полным классом Штифеля–Уитни некоторого $(n-m)$-мерного расслоения, слой которого над точкой $x \in M$ отождествляется с ортогональным дополнением в $\mathbf{R}^n$ к образу касательной плоскости к M в точке x под действием этого отображения.

Например, для $\mathbf{R}P^4$ обратный класс Штифеля — Уитни в размерности 3 отличен от нуля, поэтому $\mathbf{R}P^4$ нельзя иммерсировать в $\mathbf{R}^6$.

Одна из классических задач дифференциальной топологии состояла в следующем. Пусть задано число m. Каково минимальное число $n = n(m)$, для которого любое компактное многообразие M^m можно иммерсировать в $\mathbf{R}^n$?

1) Если $m = 2^i$, то $n = 2m - 1$. В самом деле, если $n = 2m - 1$, то любое компактное многообразие M^m можно иммерсировать в $\mathbf{R}^n$ по теореме Уитни. А пример многообразия, которое (в силу предыдущей теоремы) нельзя иммерсировать в $\mathbf{R}^n$ дает $\mathbf{R}P^m$.

2) Любое натуральное число m можно записать в виде $m = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots$, где $i_1 > i_2 > \ldots$ (двоичная запись числа). Рассмотрим многообразие $(\mathbf{R}P^{2^{i_1}}) \times (\mathbf{R}P^{2^{i_2}}) \times \cdots$ Его касательное расслоение — прямая сумма касательных расслоений, поэтому обратный класс Штифеля — Уитни имеет нетривиальный элемент в размерности $(2^{i_1} - 1) + (2^{i_2}_1) + \cdots$. Таким образом, если $d(m)$ — количество единиц в двоичной записи числа m, нельзя иммерсировать в $\mathbf{R}^n$ при $n = 2m - d(m) - 1$. Поэтому $n(m) \geq 2m - d(m)$.

В свое время была гипотеза Масси, что эта оценка точная. В 80-е годы гипотеза Масси была доказана Р. Коэном.

Теория интерполяции

Пусть задано многообразие M, задан набор функций $f_1, \ldots, f_k : M \to \mathbf{R}$, а еще задан набор i точек многообразия M (узлы интерполяции). Произвольную функцию $\varphi : M \to \mathbf{R}$ требуется проинтерполировать с заданными узлами интерполяции, т.е. требуется подобрать числа λ_l так, чтобы в любом узле интерполяции выполнялось равенство $\sum \lambda_l f_l = \varphi$.

Определение 1. *Система функций $f_1, \ldots, f_n$ называется i-интерполирующей на многообразии M, если для любых i узлов интерполяции любую функцию φ можно проинтерполировать в этих узлах какой-нибудь функцией вида $\sum \lambda_l f_l$.*

Возникает задача: для данных многообразия M и числа i найти число $I(M,i)$ — минимальное количество элементов i-интерполирующей системы.

Если $M=\mathbf{R}^1$, то $I(M,i)=i$. В качестве интерполирующей системы можно взять функции $(1,x,\dots,x^{i-1})$.

Если $M=S^1$ и i нечетно, то также $I(M,i)=i$. В качестве интерполирующей системы можно взять тригонометрические многочлены степени $(i-1)/2$. Если же i нечетно, то $I(M,i)=i+1$.

В общей ситуации нижняя (очень близкая к точной) оценка числа $I(M,i)$ получается при помощи следующих понятий. Пусть M — многообразие и $\{f_1,\dots,f_N\}$ — некоторая система функций. Рассмотрим конфигурационное пространство

$$B(M,i)=\{\text{подмножества мощности} \quad i \quad \text{в} \quad M\}.$$

Над $B(M,i)$ есть два расслоения. А именно, тривиальное N-мерное расслоение $\mathbf{R}^N$, слои которого отождествляются с пространством линейных комбинаций функций $f_1,\dots,f_N$, и i-мерное расслоение ξ^i, слой которого над набором точек $x_1,\dots,x_i$ — это пространство функций на этом множестве точек. Имеется канонический *гомоморфизм ограничения* первого расслоения во второе: для любой точки многообразия $B(M,i)$, то есть набора точек $(x_1,\dots,x_i)\in M$, точке слоя первого расслоения, т.е. линейной комбинации функций $f_1,\dots,f_N$, сопоставляем набор ее значений в точках $x_1,\dots,x_i$.

Утверждение 2. *Система функций $\{f_1,\dots,f_N\}$ является i-интерполирующей тогда и только тогда, когда это отображение сюръективно.*

В частности, если существует i-интерполирующая система функций с $N=i$, то эти два расслоения должны быть изоморфны. Но для S^1 при четном i второе расслоение неориентируемо.

Теорема 3. *Для любого M, $I(M,i)\geq i+\deg(w(\xi^i))^{-1}$, где $\deg(w(\xi^i))^{-1}$ — старшая размерность, в которой обратный класс Штифеля — Уитни расслоения ξ^i над $B(M,i)$ не равен 0.*

Действительно, если отображение расслоений сюръективно, то его ядра тоже образуют расслоение. При этом $(w(\xi^i))^{-1}$ — класс Штифеля — Уитни этого расслоения ядер, размерность которого, с одной стороны, равна $N-n$, а с другой не меньше чем $\deg(w(\xi^i))^{-1}$.

Пример 1. *Пусть например $M=\mathbf{R}^2$. Несложно проверить, что $I(\mathbf{R}^2,2)=3$ (интерполирующая система $1,x,y$), $I(\mathbf{R}^2,3)=4$ (интерполирующая система $1,x,y,x^2+y^2$). Неожиданным образом, следующий член этой последовательности, $I(\mathbf{R}^2,4)$, равен 7.*

Вообще, для любого i справедливо неравенство $I(\mathbf{R}^2, i) \leq 2i - 1$. Чтобы его доказать, рассмотрим плоскость как $\mathbf{C}^1$, введем комплексную координату z и возьмем функции $1, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$, $\operatorname{Re} z^2, \operatorname{Im} z^2, \ldots,$ $\operatorname{Re} z^{i-1}, \operatorname{Im} z^{i-1}$.

Оценка снизу имеет вид $I(\mathbf{R}^2, i) \geq 2i - d(i)$, где $d(i)$ — количество единиц в двоичной записи числа i. Она вытекает из предыдущей теоремы и принадлежащего Д.Б.Фуксу изучения колец $H^*(B(\mathbf{R}^2, i), \mathbf{Z}_2)$.

Если i – степень двойки, то верхняя и нижняя оценки совпадают. Удивительным образом, в первом же случае, когда эти две оценки не совпадают, т.е. при $i = 3$, точна сложная нижняя оценка, а не простая верхняя.