В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 6

Кобордизм

Пусть M^n — гладкое компактное многообразие без края. Говорят, что многообразие M^n кобордантно нулю, если оно является краем некоторого компактного многообразия W^{n+1}, т.е. $M^n = \partial W^{n+1}$.

Многообразия M_1^n и M_2^n (неориентированно) кобордантны, если их объединение кобордантно нулю. Есть еще понятие ориентированного кобордизма, когда требуется, чтобы ориентация края многообразия W^{n+1} совпадала с ориентациями многообразий M_1^n и M_2^n. Но сейчас мы будем заниматься только неориентированным кобордизмом.

Имеются препятствия к кобордантности — числа Штифеля–Уитни. В случае неориентированного кобордизма они дают точный критерий кобордантности.

Числа Штифеля–Уитни

Пусть M^n — гладкое многообразие и $w_1, \dots, w_n \in H^*(M^n, \mathbf{Z}_2)$ — его классы Штифеля–Уитни. Рассмотрим их всевозможные произведения $w_{k_1} \cdot \dots \cdot w_{k_m}$ чистой размерности n (имеется в виду, что $k_1 + \dots + k_m = n$), при этом индексы k_j могут повторяться. Спаривая класс $w_{k_1} \cdot \dots \cdot w_{k_m} \in H^n(M^n, \mathbf{Z}_2)$ с фундаментальным классом многообразия M^n, лежащим в $H_n(M^n, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$, получаем *число Штифеля–Уитни*, соответствующее (неупорядоченному) разбиению числа n в сумму $k_1 + \dots + k_m$.

Теорема 1 *Если многообразие M^n кобордантно нулю, то все его числа Штифеля–Уитни, соответствующие всем таким разбиениям, равны нулю.*

Запишем точную когомологическую последовательность пары (W^{n+1}, M^n):

$$\to H^n(W^n) \xrightarrow{i_*} H^n(M^n) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(W^{n+1}, M^n) \to$$

(имеются в виду когомологии с коэффициентами $\mathbf{Z}_2$). У многообразия W^{n+1} также есть касательное расслоение и есть классы Штифеля–Уитни. В ограничении на M^n касательное расслоение к W^{n+1} распадается в прямую сумму касательного расслоения к M^n и тривиального, поэтому все классы Штифеля–Уитни многообразия M^n индуцируются из одноименных классов (касательного расслоения) W^{n+1} при тождественном вложении. Следовательно, и все произведения $w_{k_1} \cdot \ldots \cdot w_{k_m} \in H^n(M^n)$ лежат в образе отображения i_*, а значит, они лежат в ядре отображения δ.

Рассмотрим фундаментальные гомологические классы наших многообразий: $[M^n] \in H_n(M^n)$ и $[W^{n+1}] \in H_{n+1}(W^{n+1}, M^n)$. Первый из них получается из второго при граничном гомоморфизме из точной последовательности пары (W^{n+1}, M^n). Для любого $\alpha \in H^n(M^n)$ выполняется равенство

$$\langle [M^n], \alpha \rangle = \langle [W^{n+1}], \delta\alpha \rangle,$$

где $\delta : H^n(M^n) \to H^{n+1}(W^{n+1}, M^n)$ — кограничный оператор. Если $\alpha = w_{k_1} \cdot \ldots \cdot w_{k_m}$, то $\delta\alpha = 0$, поэтому $\langle [M^n], \alpha \rangle = 0$.

Например, проективная плоскость $\mathbf{R}P^2$ не кобордантна нулю, потому что ее эйлерова характеристика нечетна.

Теорема 2 *Если все числа Штифеля–Уитни многообразия M^n равны нулю, то оно (неориентированно) кобордантно нулю.*

Эта теорема (принадлежащая Тому) доказывается очень трудно.

Рассмотрим свободную абелеву группу, порожденную всеми гладкими компактными многообразиями (без края, но вообще говоря несвязными) размерности n и профакторизуем ее по подгруппе, порожденной многообразиями, кобордантными нулю. Для любого многообразия M^n выполняется соотношение $2M^n = 0$ (действительно, $2M^n = \partial(M^n \times [0,1])$), поэтому в результате факторизации получим абелеву группу, все ненулевые элементы которой имеют порядок 2. Эту группу называют группой n-мерных (неориентированных) кобордизмов.

Из предыдущей теоремы следует, что размерность (над $\mathbf{Z}_2$) группы n-мерных кобордизмов не больше количества неупорядоченных разбиений числа n на положительные слагаемые. Но между некоторыми числами Штифеля–Уитни есть соотношения, выполняющиеся на всех многообразиях данной размерности. Например, для двумерных многообразий выполняется соотношение $w_1^2 = w_2$:

для всех ориентированных поверхностей этот класс нулевой, а для всех неориентированных — нет. Если учесть такие соотношения, то как раз и получим группу кобордизма, размерность которой будет несколько меньше чем число разбиений.

Препятствия к вложимости

Для построения препятствий к вложимости многообразий в евклидово пространство нам потребуются еще два понятия.

Изоморфизм Тома

Рассмотрим произвольное n-мерное векторное расслоение $E \to B$ с клеточной базой B. Положим $E_0 = E \setminus \{\text{нулевое сечение}\}$. (Другая возможность, при которой все нижеследующие формулировки также верны, такова: введем на расслоении E евклидову структуру и обозначим через E_0 множество всех векторов во всех слоях, длина которых не меньше единицы (или любого другого фиксированного положительного числа).) У изоморфизма Тома есть три формулировки:

1) $H^k(B, \mathbf{Z}_2) \simeq H^{k+n}(E, E_0, \mathbf{Z}_2)$;

2) если расслоение ориентируемо, то $H^k(B, \mathbf{Z}) \simeq H^{k+n}(E, E_0 : \mathbf{Z})$;

3) для любого расслоения $H^k(B, \mathbf{Z}) \simeq H^{k+n}(E, E_0; \mathrm{Or}\,)$, где Or — "ориентирующий пучок", т.е. локальная система групп со слоем $\mathbf{Z}$, следящая за ориентацией расслоения.

Все эти утверждения очевидным образом получаются из спектральной последовательности расслоения пар

$$(E, E_0) \stackrel{(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus 0)}{\longrightarrow} B.$$

Когомологии (с коэффициентами $\mathbf{Z}_2$) пары $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus 0)$ равны $\mathbf{Z}_2$ в размерности n и тривиальны в остальных размерностях, поэтому когомологии пары (E, E_0) получаются из когомологий B поднятием размерности на n. Для ориентируемого расслоения это верно и с коэффициентами $\mathbf{Z}$. Для неориентируемого расслоения в случае целых коэффициентов приходится рассматривать когомологии с коэффициентами в локальной системе.

Для наших целей пока достаточно первой формулировки.

Нормальное расслоение

Пусть многообразие M^n вложено в многообразие K^{n+k} как регулярное подмногообразие. Тогда можно определить нормальное расслоение на M^n как фактор касательного расслоения к K^{n+k} (рассматриваемого только в точках многообразия M^n) по касательному расслоению M^n. По-другому можно определить нормальное расслоение как множество всех касательных векторов к K^{n+k}, приложенных в точках M^n и ортогональных всем касательным векторам к M^n; для этого нужно ввести некоторую риманову структуру на многообразии K^{n+k}.

Бывают плохие вложения, например, всюду плотная обмотка тора

$$\mathbf{R} \to T^2 = S^1 \times S^1 : t \mapsto (at, bt) \pmod{2\pi},$$

где числа a и b несоизмеримы. Мы будем рассматривать только регулярные вложения, т.е. такие вложения, что у любой точки $m \in M$ есть окрестность, в которой пара (K, M) диффеоморфна паре $(\mathbf{R}^{n+k}, \mathbf{R}^n)$. Для регулярности достаточно потребовать, чтобы образ многообразия M был замкнут в K.

Предложение 1 *Если многообразие M^n не имеет края и вложено в K^{n+k} так, что его образ замкнут в K^{n+k}, то M^n обладает трубчатой окрестностью, гомеоморфной тотальному пространству нормального расслоения.*

Трубчатая окрестность многообразия M^n — это его окрестность, для которой существует ретракция на M^n, являющаяся локально тривиальным расслоением со слоями, гомеоморфными $\mathbf{R}^k$.

Теорема о существовании трубчатой окрестности доказывается при помощи римановой геометрии. Из каждой точки многообразия M^n выпускаем геодезические во всех направлениях, ортогональных M^n. Геодезические достаточно малой длины попарно не пересекаются, не пересекают повторно многообразие M^n, и покрывают все точки, достаточно близкие к M^n. Поэтому их объединение дает трубчатую окрестность. Проекция на M^n сопоставляет каждой точке окрестности ту (единственную) точку, из которой была выпущена проходящая через нее геодезическая.

Пусть M — r-компонентное компактное подмногообразие без края, EM — его трубчатая окрестность: $M \subset EM \subset K$. Легко показать, что для когомологий с коэффициентами $\mathbf{Z}_2$

$$H^k(K, K \setminus M) = H^k(EM, EM \setminus M) = H^k(\nu M, \nu M \setminus M) = H^0(M, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2^r \quad (1)$$

(здесь в третьей скобке νM — нормальное расслоение, а M рассматривается как нулевое сечение нормального расслоения). Рассмотрим точную последовательность пары (K, M) :

$$\to H^k(K, K \setminus M) \to H^k(K) \to H^k(M) \to \qquad (2)$$

В $H^0(M, \mathbf{Z}_2)$ есть фундаментальный коцикл, принимающий значение 1 на любой точке; он двойствен фундаментальному циклу. Изоморфизм (1) сопоставляет ему элемент в $H^k(K, K \setminus M)$ (также называемый фундаментальным). При отображении $H^k(K, K \setminus M) \to H^k(K)$ этот коцикл переходит в коцикл $H^k(K)$, двойственный по Пуанкаре к фундаментальному циклу M: его значение на k-мерной сингулярной цепи в K, находящейся в общем положениии с M, равно числу $(\mathrm{mod}\ 2)$ точек пересечения цикла с симплексом. Последняя стрелка в (2) — это ограничение коцикла в K до коцикла в M.

Предложение 2 *При сквозном отображении (2) фундаментальный коцикл переходит в $w_k(\nu M)$ (класс Штифеля–Уитни нормального расслоения).*

Смысл этого утверждения состоит в следующем. Пусть $[a] \in H_k(M, \mathbf{Z}_2)$. Мы хотим вычислить значение на нем нашего коцикла в K. Для этого нужно слегка его пошевелить, приведя в общее положение с M или, что эквивалентно, пошевелить само M и взять пересечение с (непошевеленным) циклом $[a]$. Пошевелить — это значит взять маленькое векторное поле в K вблизи M и сдвинуть M вдоль этого поля внутри K. Если поле — общего положения, то сдвинутое многообразие M трансверсально исходному (и циклу $[a]$, лежащему в нем), поэтому искомое значение — это индекс пересечения цикла $[a]$ с множеством пересечения сдвинутого M и несдвинутого. Это множество соответствует тем точкам M, которые не сдвинулись в нормальном направлении. Но это и есть цикл, двойственный по Пуанкаре классу $w_k(\nu M)$. Действительно, векторное поле — это сечение над M касательного расслоения TK. После факторизации по модулю касательного расслоения TM получаем сечение нормального расслоения. Точки пересечения пошевеленного многообразия M и исходного многообразия M как раз соответствуют тем точкам, для которых сечение нулевое. Этот цикл двойствен по Пуанкаре k-му классу Штифеля–Уитни нормального расслоения.

Если K — линейное пространство, $K = \mathbf{R}^k$, то полный класс Штифеля–Уитни нормального расслоения к M в K не зависит от вложения (и от числа k) Его можно вычислить по формуле Уитни: $w(\nu M) = (w(TM))^{-1}$.

Теорема 3 *Если существует вложение $M^n \to \mathbf{R}^{n+k}$, то $w_k(\nu M) = 0$.*

Действительно, в силу последнего предложения этот класс лежит в образе сквозного гомоморфизма (2), проходящего через нулевую группу $H^k(\mathbf{R}^{n+k}, \mathbf{Z}_2)$.

Эта оценка размерности ровно на 1 лучше, чем оценка, которую мы получили для иммерсий. Для иммерсий утверждалось, что если $w_k(\nu M) \neq 0$, то многообразие M нельзя иммерсировать в пространство размерности $n + k - 1$.

У этой теоремы есть простой смысл. Возьмем произвольное отображение общего положения $M^n \to \mathbf{R}^{n+k}$ и рассмотрим множество двойных точек (т.е. таких точек a, что существует точка $b \neq a$, для которой $f(a) = f(b)$). В случае общего положения замыкание этого множества в окрестности каждой точки диффеоморфно полуалгебраическому $(n-k)$-мерному множеству, для которого можно определить фундаментальный гомологический класс $(\mathrm{mod}\ 2)$, а следовательно и двойственный по Пуанкаре k-мерный класс в $H^k(M, \mathbf{Z}_2)$. Это будет класс $w_k(\nu M)$.

Предположим например, что отображение $M^n \to \mathbf{R}^{n+k}$ является хотя бы иммерсией. Попробуем вычислить класс гомологий множества двойных точек. В общем положении они образуют подмножество коразмерности k. Какой цикл высечет на себе слегка пошевеленное многообразие? С одной стороны, этот цикл гомологичен 0, потому что мы спариваем два класса k-мерных гомологий пространства $\mathbf{R}^n$. (Мы могли бы пошевелить многообразие не слегка, а сдвинув его далеко; тогда пересечение было бы пусто.) С другой стороны, при малом шевелении получаются точки самопересечения двух типов:

1) трансверсальные самопересечения исходной иммерсии чуть сдвигаются и определяют в любом экземпляре многообразия M — пошевеленном или непошевеленном — тот же класс гомологий, что и старое множество двойных точек;

2) точки пересечения, получающиеся из "близких точек": они возникают при сдвиге многообразия вдоль самого себя; они соответствуют нулям типичного сечения нормального расслоения.

Второе множество определяет класс гомологий, двойственный по Пуанкаре классу $w_k(\nu M)$. Но, как уже говорилось, сумма первого и второго классов гомологична нулю. Поэтому множество двойных точек исходной иммерсии двойственно по Пуанкаре классу $w_k(\nu M)$.

Почти те же рассуждения доказывают слеующую теорему.

Теорема 4 *Если M ориентировано и существует вложение $M^n \to \mathbf{R}^{n+k}$, то (целочисленный) класс Эйлера нормального расслоения к M в $\mathbf{R}^{n+k}$ равен 0.*