В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 7

Классы, двойственные особенностям

Для отображения $M^m \to \mathbf{R}^n$ можно рассмотреть множество его особых (в том или ином смысле) точек. Например, если мы занимаемся задачей о существовании иммерсии $M^m \to \mathbf{R}^n$, то особыми точками естественно считать те точки, в которых вырождается дифференциал отображения. Если мы занимаемся задачей о существовании вложения, то особыми естественно считать еще и двойные точки (т.е. точки M^m, образы которых совпадают с образами других точек). Существуют и более тонкие задачи о существовании отображений, вообще говоря имеющих особые точки, но не слишком сложные (например, отображения $M^m \to \mathbf{R}^n$, у которых ранг дифференциала может падать не более чем на k, или имеющие самопересечения кратности не выше k).

Рассмотрим замыкание множества особых точек. В случае отображения общего положения это множество в каждой окрестности объемлемо диффеоморфно алгебраическому множеству. Для такого множества существует триангуляция, а значит, существует класс когомологий (по крайней мере с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$), двойственный по Пуанкаре этому множеству. Он сохраняется при деформациях. В частности, если для какого-то отображения общего положения получается ненулевой класс когомологий, то и для любого отображения общего положения получается ненулевой класс когомологий. Этим свойством можно воспользоваться для построения препятствий к существованию иммерсий и вложений: если класс когомологий, двойственный замыканию множества особых точек, отличен от нуля, то это множество не может быть пустым.

Аналогично можно рассмотреть особенности отображения M^m в произвольное многообразие N^n и построить класс когомологий, двойственный этому множеству. Этот класс является препятствием к существованию неособого отображения *в том же гомотопическом классе.*

Часто оказывается, что если такой препятствующий класс когомологий нулевой, то действительно существует отображение, для которого множество особенностей пусто.

Вместо того чтобы рассматривать все особые точки, можно рассматривать лишь те особые точки, в которых происходит что-то более сложное, т.е. рассматривать особенности какого-то специального типа. В таком случае тоже можно определить двойственный класс когомологий. Так иногда удается построить дополнительное препятствие, например, к существованию иммерсии. Действительно, может оказаться, что множество всех особых точек определяет нулевой класс когомологий, и значит на позволяет доказать отсутствие иммерсий. Но может быть множество особых точек, в которых ранг дифференциала падает на 2, уже гомологически нетривиально и все-таки дает такое доказательство.

Классификация особенностей

Простейшая классификация особенностей — по рангу дифференциала (или, в координатной записи, матрицы Якоби).

Дифференцируемое отображение $f : M^m \to N^n$ определяет для любой точки $x \in M^m$ линейное отображение $df : T_x M^M \to T_{f(x)} N^n$. Точка x — *неособая для* f, если ранг этого отображения равен $\min(m, n)$, в противном случае f *имеет особенность в точке* x.

Далее, f имеет в точке x *особенность типа* Σ^i если i — размерность ядра отображения $df|_x$. Если в локальных координатах вблизи точек x и $f(x)$ отображение f задано набором функций $y_j = f_j(x_l)$, $j = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, m$, то i — это размерность ядра матрицы Якоби $\left\{\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\right\}$, однако легко видеть, что она не зависит от выбора этих локальных координат.

Принадлежность особенности классу Σ^i полностью определяется 1-струей функции (отображения) f.

Бывают особенности, принадлежащие одному классу Σ^i, но не эквивалентные. Простейший пример дают отображения $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ и класс Σ^1. Начнем с отображений $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$. Простейшая особенность имеет вид $y = x^2$. Можно сделать так называемую стабилизацию этой особенности и получить особенность $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ (в n-мерном случае получаем $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2, \ldots,$ $y_n = x_n$). Такую особенность (а также все особенности, сводящиеся к ним подходящим выбором локальных координат) называют особенностями типа складки. См. рис. 1 на последней странице этой лекции.

Точки складки образуют гиперповерхность в M^m, а их образ в N^n — локально гладкую (но может быть самопересекающуюся) гиперповерхность в N^n.

Складка — устойчивая особенность; она не устраняется малым шевелением отображения (в отличие, например, ото особенности функции $f = x^3$, которая убивается сколь угодно малым локальным шевелением, заменяющим x^3 на $x^3 + \epsilon x$). Это означает, что при малом шевелении f вблизи любой точки складки старого отображения найдется точка складки нового.

Есть еще одна неустранимая устойчивая особенность отображений $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, обнаруженная Уитни. Эту особенность называют сборка. Точки сборки образуют множество коразмерности 2. Это отображение изображено проекцией на рис. 2 (стр. 8).

В локальных координатах оно задается в виде

$$\begin{cases} y_1 &= x_1^3 + x_1 x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Сборку удобно рассматривать как 1-параметрическое семейство функций $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ от переменной x_1 (зависящих от параметра $x_2 = y_2$), претерпевающих морсовскую перестройку рождения–уничтожения.

Имеются и "многомерные" сборки отображений $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ с любым $n \geq 2$, их явная локальная запись получается из (1) приписыванием $n - 2$ "слепых" уравнений $y_l = x_l$, $l = 3, \ldots, n$.

Вблизи особой точки типа сборки множество всех особых точек гладкое (в отличие от его проекции, которая имеет точку возврата). Почти все точки этого множества — точки складки. Но одна особая точка $(0, 0)$ имеет более сложную структуру.

Имеется инвариант, позволяющий отличить точку сборки от точки складки. Мы рассматривали класс Σ^1 (к которому очевидно принадлежат точки обоих этих типов). Более общим образом, рассмотрим у нашего отображения множество всех особых точек класса Σ^i, $i = 1, \ldots, m$. Для любого i и отображения общего положения множество всех точек, где ядро дифференциала i-мерно, является гладким подмногообразием в M^m. (Его замыкание не обязательно гладко, потому что ему уже принадлежат точки класса Σ^{i+1}, в окрестности которых это замыкание имеет конические особенности.) Рассмотрим теперь ограничение f на множество точек класса Σ^1. Для складки полученное отображение будет неособым. А для сборки ограничение f на особое множество имеет особенность. Поэтому сборка не эквивалентна складке.

В связи с этим говорят, что особенности типа сборки принадлежат классу $\Sigma^{1,1}$: вторая единица — это размерность ядра дифференциала ограничения f на множество точек, в которых ядро исходного отображения $f(M^m)$ 1-мерно.

Вообще, *символом Тома–Бордмана* особенностей отображений m-мерных многообразий в n-мерные называется произвольная конечная последовательность $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, где $m \geq i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq 0$. Коль скоро она зафиксирована, можно рассмотреть множество особых точек следующего вида. Сначала берем особые точки, в которых ядро дифференциала i_1-мерно. Если наше отображение — общего положения, то такие точки образуют гладкое подмногообразие $\{\Sigma^{i_1}\} \subset M^m$.

(Задача: пользуясь теоремой трансверсальности Тома найти коразмерность этого подмногообразия.)

Ограничиваем на него наше отображение и рассматриваем особенности полученного отображения $f|_{\Sigma^{i_1}}$, в которых размерность его ядра равна i_2. Снова в случае общего положения получаем гладкое многообразие, и т.д.

Но и эта классификация тоже неполная: случается, что две особые точки принадлежат одному классу Тома–Бордмана, но не эквивалентны, то есть ни при каком выборе локальных координат не записываются одинаковыми формулами. Правда, так бывает только если $i_1 > 1$: все особенности одного и того же класса $\Sigma^{1,\ldots,1,0}$ эквивалентны друг другу.

Для любого класса Тома–Бордмана Σ^I, $I = (i_1, i_2, \ldots)$, и любого отображения $f : M^m \to N^n$ общего положения, замыкание множества таких особых точек в M^m локально гомеоморфно алгебраическому множеству, а следовательно можно определить класс когомологий, двойственный по Пуанкаре этому множеству. Имеются в виду когомологии по модулю 2, потому что для вещественного алгебраического множества фундаментальный класс определен только по модулю 2. Для символа Тома–Бордмана $I = (i_1, i_2, \ldots, 0)$ можно определить класс когомологий $\omega(I) \in H^*(M, \mathbf{Z}_2)$. Он лежит в размерности, равной коразмерности множества особых точек этого типа. (Явная формула для этой коразмерности довольно сложна, см. [1].)

Например, при $m < n$ и $I = (1, 0)$ для отображений $M^m \to \mathbf{R}^n$ двойственный класс когомологий к множеству $\overline{\Sigma^{1,0}}$ — это $(n-m+1)$-мерный класс Штифеля–Уитни, т.е. $\omega(1) = w_{n-m+1}(M)$.

Может случиться так, что двойственный класс для Σ^1 равен нулю, а двойственный класс для Σ^2 не равен нулю. Это позволяет строить дополнительные препятствия. Для отображений $M^m \to \mathbf{R}^m$ коразмерность особых точек класса Σ^2 в общем положении равна 4. Двойственный класс в этом случае определен даже по модулю целых чисел. Этот класс — *первый класс Понтрягина* многообразия M^n.

Пусть задан какой-то символ Тома–Бордмана. Рассмотрим отображение $f : M^m \to N^n$ общего положения и соответствующий этому символу двойственный класс когомологий. Оказывается, что этот класс можно выразить через стандартные характеристические классы посредством так называемого полинома Тома.

В кольце когомологий M лежат классы Штифеля–Уитни $w_1(M), \ldots, w_m(M)$ и прообразы аналогичных классов $f^*(w_1(N)), \ldots, f^*(w_m(N))$. Определим класс $W(f) \in H^*(M, \mathbf{Z}_2)$ формулой

$$W(f) = \frac{1 + w_1(M) + \ldots + w_m(M)}{1 + f^*(w_1(N)) + \ldots + f^*(w_m(N))}$$

(деление определено однозначно). Этот класс распадается в сумму $1 + W_1(f) + \ldots + W_m(f)$, $W_k(f) \in H^k(M, \mathbf{Z}_2)$.

Теорема 1 (Том) *Для любого заданного класса Тома–Бордмана I и чисел m и n существует такой универсальный полином $P_I(W_1, \ldots, W_m)$, что $\forall M^m$ (компактного), $\forall N^n$, $\forall f : M^m \to N^n$ общего положения*

$$\omega(I) = P_I(W_1(f), \ldots, W_m(f)).$$

Есть много работ, в которых вычисляются эти многочлены Тома. Для Σ^i это делается просто, (явную формулу, принадлежащую Портеусу, см. § IV.1 в [2]); для $\Sigma^{i,j}$ это сделать можно, а для трех индексов есть только некоторый набор разрозненных результатов, но полного решения нет.

В теореме Тома можно вместо классов Тома–Бордмана взять любые классы особенностей. Под классом особенностей подразумевается следующее. Для некоторого k рассмотрим множество всех k-струй $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ и в нем рассмотрим подмножество $A \subset J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, обладающее такими двумя свойствами:

1) A — алгебраическое множество;

2) A инвариантно относительно замен координат в образе и прообразе.

Тогда A — *класс особенностей.* Если имеется отображение $f : M^m \to N^n$, то для любой точки можно сказать, имеет ли f в ней особенность типа A: для этого нужно ввести в окрестности точек x и $f(x)$ локальные координаты (отождествляющие эти окрестности с $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$) и посмотреть, попадает ли при этом отождествлении k-струя f в множество A. Из условия 2) следует, что ответ не зависит от выбора локальных координат, а благодаря условию 1) для отображения общего положения можно определить двойственный класс когомологий в $H^*(M, \mathbf{Z}_2)$. "Общность положения" здесь означает следующее. Класс A инвариантно определяет некоторое подмножество в пространстве струй $J^k(M^m, N^n)$, и k-струйное расширение f должно (в соответствии с теоремой трансверсальности Тома) быть трансверсально к этому множеству. (Трансверсальность имеет смысл поскольку это множество "локально алгебраично" а следовательно допускает стратификацию Уитни.)

Любой класс Тома–Бордмана, соответствующий символу $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, является классом особенностей в этом общем смысле, причем достаточно взять $k = r$: принадлежность ростка функции к такому классу однозначно распознается по его r-струе.

Можно рассматривать также задачи такого типа: существует ли иммерсия с особенностями Σ^1, но без особенностей типа Σ^2?

Критерий взрезанного квадрата

Обсудим теперь обобщения задачи о вложениях. Для вложений имеется препятствие взрезанного квадрата (deleted product). Пусть M — многообразие (или любое топологическое пространство). Рассмотрим конфигурационное пространство $B(M, 2)$, точки которого — это неупорядоченные пары различных точек в M. Если есть вложение $f : M \to \mathbf{R}^n$, то по нему можно построить отображение $B(M, 2) \to \mathbf{R}P^{n-1}$: любой точке $(a, b) \in B(M, 2)$ ставится в соответствие (неориентированное) направление $f(a) - f(b)$. По-другому можно это отображение представлять как эквивариантное отображение $F(M, 2) \to S^{n-1}$ ($F(M, 2)$ — это аналогичное пространство упорядоченных пар точек в M.) Здесь имеется в виду эквивариантность относительно действия группы $\mathbf{Z}_2$: на $F(M, 2)$ эта группа действует как перестановка точек, а на S^{n-1} как антиподальное отображение. Эквивариантность означает, что если пара $(a, b) \in F(M, 2)$ переходит в $\alpha \in S^{n-1}$, то пара $(b, a) \in F(M, 2)$ переходит в $-\alpha \in S^{n-1}$.

Отображение $p : B(M, 2) \to \mathbf{R}P^{n-1}$ должно удовлетворять следующему условию. В $H^1(B(M, 2), \mathbf{Z}_2)$ есть класс $(\pm)$, который сопоставляет пути 0 или 1 в зависимости от того, сохраняет или переставляет точки пары обход вдоль этого пути. Класс $(\pm)$ должен быть равен $p^*(\alpha)$, где α — образующая в кольце когомологий пространства $\mathbf{R}P^{n-1}$.

Это условие накладывает достаточно сильные ограничения на вложимость. Например, если n-я степень класса $(\pm)$ не равна нулю в $H^n(B(M, 2), \mathbf{Z}_2)$, то вложения не существует, потому что $\alpha^n = 0$, а когомологическое умножение естественно.

Так можно получить, например, препятствия к вложению графов в плоскость. Знаменитая теорема Куратовского утверждает, что граф можно вложить в плоскость тогда и только тогда, когда он не содержит подграф, изоморфный либо полному графу на 5 вершинах, либо граф из 9 ребер, соединяющих любую из некоторых 3 вершин с любой из 3 оставшихся. Для обоих этих графов невложимость следует из предыдущего рассуждения.

Когомологические операции

Пусть задан набор (m, G, n, F), где m, n — целые числа, G, F — абелевы группы. Когомологическая операция типа (m, G, n, F) — это правило, которое любому топологическому пространству X и любому элементу группы $H^m(X, G)$ сопоставляет элемент группы $H^n(X, F)$, причем это сопоставление функториально по X. Функториальность означает следующее. Отображение $f : X \to Y$ индуцирует отображения

$$\begin{array}{ccc} H^m(X,G) & \leftarrow & H^m(Y,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X,F) & \leftarrow & H^n(Y,F). \end{array}$$

Эта диаграмма должна быть коммутативной.

Следует отметить, что сопоставление, участвующее в определении когомологической операции, не обязано быть гомоморфизмом.

Простейший пример когомологической операции — возведение в степень: элементу $\alpha \in H^n(X, G)$ сопоставляется элемент $\alpha^k \in H^{nk}(X, G)$.

Есть еще довольно известная когомологическая операция — гомоморфизм Бокштейна. Если есть короткая точная последовательность групп

$$0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0,$$

то возникает короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \leftarrow C^*(X, G_1) \leftarrow C^*(X, G_2) \leftarrow C^*(X, G_3) \leftarrow 0.$$

Из нее, в свою очередь, возникает длинная точная последовательность групп когомологий. В этой длинной точной последовательности есть два вида дифференциалов, сохраняющих размерность, и дифференциал

$$\delta : H^i(X, G_1) \to H^{i+1}(X, G_3).$$

Это и есть гомоморфизм Бокштейна.

Когомологические операции одного типа можно складывать, поэтому они образуют группу. Эту группу описывает следующая структурная теорема.

Теорема 2 *Группа всех когомологических операций типа* (m, G, n, F) *естественно изоморфна группе* $H^n(K(G, m), F)$.

Литература

[1] Арнольд, Варченко, Гусейн–Заде, Особенности дифференцируемых отображений, Москва, Наука, 1982.

[2] Арнольд, Васильев, Горюнов, Ляшко; Особенности-I, М.: ВИНИТИ, т.6, 1988.