В. А. Васильев

Топология

Специальный курс, весенний семестр 1998 г.

1 Лекция 9

Категория и род

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. *Категорией* пространства X (обозначение: $\operatorname{cat} X$) называют минимальное из чисел i, для которых существует покрытие пространства X стягиваемыми по X множествами $A_1, \dots, A_i$. Множества A_j либо предполагаются все замкнутыми (так было в исходном определении Люстерника–Шнирельмана), либо их считают открытыми: для достаточно патологических пространств получающиеся числа $catX$ могут оказаться различными.

Пример: если $X = S^n$, то $\operatorname{cat} X = 2$ при любом определении.

Если есть топологическая пара (X, A), то можно определить *относительную категорию* $\operatorname{cat}_X A$, рассматривая покрытия A множествами, стягиваемыми в X.

Категория особенно полезна при изучении пространств петель, в частности в теории замкнутых геодезических на римановых многообразиях.

Свойства категории

1) Если X — n-мерное связное многообразие , то $\operatorname{cat} X \leq n + 1$.

2) Если $X = M^n$ — компактное многообразие без края, а $f : M^n \to \mathbf{R}$ — гладкая функция, то число критических точек f не меньше чем $\operatorname{cat} M$. Здесь идет речь о произвольных критических точках, не обязательно невырожденных.

3) $\operatorname{cat} X$ больше когомологической длины X.

Когомологическая длина X определяется следующим образом. Пусть G — произвольная абелева группа. В $H^*(X, G)$ можно определить максимальное число элементов положительной размерности, произведение которых не равно нулю. Взяв максимум таких чисел по всем группам G, получим когомологическую длину.

Например, когомологическая длина $X = \mathbf{R}P^n$ равна n. Когомологическая длина тора T^n тоже равна n. Таким образом, категория этих многообразий в точности равна $n+1$. Это — редкие примеры, когда категорию можно точно вычислить. Обычно можно получить лишь какие-то оценки.

Свойство (2) доказывается индукцией по перестройкам множеств $X_t = f^{-1}(-\infty, t]$ при прохождении через изолированные критические точки.

Докажем свойство (3). Пусть множества $A_1, \ldots, A_k$ покрывают X и стягиваемы в X. Тогда, в частности, $H^*(A_i) = 0$. Рассмотрим точную последовательность пары (X, A_i):

$$H^*(X, A_i) \to H^*(X) \to H^*(A_i) \tag{1}$$

Предположим, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in H^*(X)$ и $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \neq 0$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ рассмотрим образ элемента α_i в $H^*(A_i)$. Этот образ тривиален, так как $H^*(A_i) = 0$. Следовательно, элемент α_i является образом некоторого элемента $\bar{\alpha}_i \in H^*(X, A_i)$ при левом отображении (1). В силу естественности когомологического умножения, произведение $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k \in H^*(X)$ является образом произведения этих элементов $\bar{\alpha}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{\alpha}_k \in H^*(X, \bigcup A_i)$ при отображении $H^*(X, \bigcup A_i) \to H^*(X)$. Но $\bigcup A_i \equiv X$, и $H^*(X, \bigcup A_i) = 0$. Следовательно, $\alpha_1 \cdots \alpha_k = 0$. Противоречие.

Если X — многообразие, то это доказательство можно еще проиллюстрировать так. Класс α_i задается индексом пересечения с циклом $\mathcal{A}_i \in H_{n-*}(X)$. Утверждение, что класс α_i приходит из $H^*(X, A_i)$, означает, что он реализуется циклом, лежащим в $H_{n-*}(X \setminus A_i)$. Произведение элементов α_i можно реализовать так: приводим все эти циклы в общее проложение, берем пересечение их всех (это обязательно будет цикл) и рассматриваем двойственный класс когомологий. В нашем случае это пересечение будет лежать в дополнении *ко всем* множествам A_i, то есть пусто.

Важное обобщение категории — *род расслоенного пространства.* Это понятие было введено А. С. Шварцем. Пусть есть произвольное отображение $f: Y \to X$, для которого $X = f(Y)$. Род $g(f)$ этого отображения определяется как минимальная мощность покрытия множества X открытыми множествами $A_1, \ldots, A_k$, для которых над любым из A_i существует непрерывное сечение отображения f.

Например, если отображение $f: S^1 \to S^1$ — диффеоморфизм, то род отображения f равен 1. Если $f: S^1 \to S^1$ — двулистное накрытие, то род f равен 2. Для n-листного ($n = 2, 3, \ldots, \infty$) накрытия $f: S^1 \to S^1$ род тоже равен 2.

Чаще всего род используется для расслоений.

Есть несколько способов, позволяющих вычислять или хотя бы оценивать род.

Способ 1. Этот способ годится для произвольных отображений $f : Y \to X$. Для отображения f можно определить когомологическую длину $l(f)$. А именно, отображение f индуцирует отображение $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$. Рассмотрим подкольцо $\operatorname{Ker}(f^*) \subset H^*(X)$ и найдем в нем максимальное число элементов положительной размерности, произведение которых не равно нулю. Это и есть $l(f)$.

Теорема 1 *(А.С.Шварц). $g(f) \geq l(f)$. При этом $l(f)$ можно определять с помощью любого кольца коэффициентов.*

Доказательство то же самое, что и в случае категории, но есть один нюанс. В точной последовательности пары

$$H^*(X, A_i) \to H^*(X) \to H^*(A_i)$$

на этот раз не выполняется равенство $H^*(A_i) = 0$. Однако если $\alpha \in \operatorname{Ker} f^*$, то α переходит в нулевой элемент в когомологиях A_i: действительно, в противном случае $f^*(\alpha) \in H^*(Y)$ не равно 0 уже в ограничении на образ множества A_i при сечении, существующем в силу определения рода.

Категория является частным случаем рода. А именно, нужно рассмотреть расслоение Серра. Категория пространства — это род расслоения Серра над ним.

Способ 2. Этот способ годится для локально тривиальных расслоений. Пусть $f : Y \to X$ — локально тривиальное расслоение. Тогда род этого отображения можно точно вычислить в терминах некоторых ассоциированных расслоений.

С расслоением f можно связать его k-ю степень $f^{(*k)}$. Слой расслоения $f^{(*k)}$ над точкой $x \in X$ устроен следующим образом. Возьмем k экземпляров слоя $f^{-1}(x)$. Их джойн $f^{-1}(x) * \cdots * f^{-1}(x)$ — это и есть слой нашего нового расслоения.

При взятии джойна младшие гомотопические группы пропадают. Поскольку препятствие к существованию сечения формулируется в терминах этих гомотопических групп, построить сечение для расслоения $f^{(*k)}$ с достаточно большим k проще, чем для исходного расслоения.

Теорема 2 *(А.С.Шварц). Род расслоения f не превосходит k тогда и только тогда, когда расслоение $f^{(*k)}$ имеет непрерывное сечение.*

При $k = 1$ теорема очевидно верна: расслоение имеет сечение тогда и только тогда, когда его род не превосходит 1.

Докажем теперь требуемое утверждение в общем случае. Предположим сначала, что род расслоения f не превосходит k, т.е. существует покрытие базы k областями, над которыми можно построить сечения. Требуется построить сечение расслоения со слоем $F_1 * \cdots * F_k$, где $F_i \simeq F = f^{-1}(x)$. Рассмотрим разбиение единицы на X, подчиненное покрытию $\{A_i\}$, т.е. неотрицательные непрерывные функции φ_i на X, сумма которых равна 1, причем функция φ_i тождественно равна нулю вне A_i. По этому разбиению единицы и по заданной системе сечений исходного расслоения над множествами A_i мы построим требуемое сечение расслоения $f^{(*k)}$. Возьмем точку $x \in X$. Для нее определены значения $\varphi_i(x)$ и в тех случаях, когда $\varphi_i(x) \neq 0$ (т.е. $x \in A_i$), над точкой x определены сечения, т.е. точки $y_i(x)$ в соответствующих экземплярах F_i слоя.

Слой $F_1 * \cdots * F_k$ нового расслоения представляет собой объединение симплексов с вершинами в $F_1, \ldots, F_k$. Рассмотрим симплекс (вообще говоря не максимальной размерности), натянутый на точки y_i. Возьмем выпуклую линейную комбинацию $\sum \phi_i(x) y_i(x)$ вершин этого симплекса. Такие точки, сопоставленные всем точкам $x \in X$, образуют требуемое непрерывное сечение.

Обратно, предположим, что расслоение $f^{(*k)}$ имеет сечение. Требуется покрыть базу k множествами A_i и над каждым множеством построить непрерывное сечение. Слой расслоения $f^{(*k)}$ представляет собой джойн k множеств. Его можно покрыть k открытыми множествами: выбираем k способами один экземпляр $F_i \simeq F$ и выбрасываем из $f^{(*k)}$ его подджойн $f^{(*k-1)}$, состоящий из симплексов, натянутых на точки оставшихся $k-1$ экземпляров.

У нас есть сечение расслоения $f^{(*k)}$ и мы получили покрытие пространства этого расслоения k открытыми множествами. Скажем, что точка базы принадлежит множеству A_i, если образ сечения над ней лежит в i-м рассматриваемом множестве, т.е. не лежит в грани, в которой нет точки множества F_i.

Сечение над множеством A_i строится так. Над этим множеством у нас есть сечение расслоения $f^{(*k)}$, причем оно не попадает на грань, в которую не входит F_i. Тогда соответствующую точку симплекса с вершинами в точках множеств $F_1, \ldots, F_k$ можно сдвинуть в вершину этого симплекса, принадлежащую F_i.

Способ 3. Этот способ работает в специальной ситуации. Пусть $f : Y \to X$ — *главное* G-расслоение, где G — топологическая группа. Тогда можно определить когомологический род этого расслоения. Расслоение $f: Y \to X$ индуцируется из универсального главного G-расслоения посредством отображения $cl: X \to BG$, которое определено однозначно с точностью до гомотопии. Поэтому определено отображение

$$cl^*: H^*(BG, T) \to H^*(X, \tilde{T}), \tag{2}$$

где T — произвольный G-модуль (или произвольная локальная система групп на BG), а $\tilde{T}$ — локальная система на X, индуцированная из T отображением (2).

Когомологический T-род расслоения f определяется следующим образом. Может оказаться, что начиная с какой-то размерности отображение (2) нулевое. Например, так бывает если X — конечномерный CW-комплекс. Возьмем наименьшее число j, для которого отображение (2) тривиально действует на $H^i(BG, T)$ при всех $i \geq j$. Это и есть когомологический T-род $h_T(f)$.

Теорема 3 *(А.С.Шварц). Для любого G-модуля T выполняется неравенство $g(f) \geq h_T(f)$.*

Эта оценка тесно связана с предыдущей: классифицирующее пространство и универсальное расслоение тоже строятся с помощью джойнов.

Приложения к теории сложности вычислений

Пусть есть какая-то вычислительная задача. Алгоритм для решения этой задачи — это ориентированный граф, у которого есть вершины с названиями четырех видов.

Вход. На вход подаются числа $a_1, \ldots, a_k$.

Арифметический блок. В арифметических блоках производятся арифметические операции над входными данными и числами, полученными выше в алгоритме.

Ветвление. Значение какого-то числа, полученного выше в алгоритме, сравнивается с нулем и в зависимости от результата управление передается в одном из двух направлений.

Выход. Каждая цепочка заканчивается выходом, в котором некоторая совокупность найденных выше чисел объявляется ответом.

Граф расположен так, что каждый раз управление передается строго вниз. В частности, циклы недопустимы.

Пусть имеется какая-то вычислительная задача. Нужно оценить снизу число ветвлений алгоритмов, решающих эту задачу. *Топологической сложностью* алгоритма называется число его ветвлений. А топологической сложностью задачи — минимум таких показателей по всем алгоритмам.

Например, рассмотрим задачу о приближенном решении полиномиального уравнения

$$x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d = 0. \tag{3}$$

Будем считать, что $a_i \in \mathbf{C}$ и $|a_i| \leq 1$.

На вход подается $2d$ вещественных чисел — вещественные и мнимые части коэффициентов a_i. На выходе получаем либо 2 вещественных числа — вещественную и мнимую части приближенно вычисленного корня (если ищем один корень), либо $2d$ вещественных чисел (если ищем все корни). Назовем алгоритм ε-хорошим, если корни вычислены с точностью до ε (и нет делений на нуль). В случае вычисления всех корней имеется в виду, что настоящие корни исходного уравнения можно упорядочить так, что они будут отличаться от вычисленных d комплексных чисел не более чем на ε.

Теорема 4 *Если d — степень простого числа, то топологическая сложность нахождения одного корня уравнения (3) с точностью до ε (если ε достаточно мало) равна $d-1$.*