Экзамен по топологии 17 мая 1998 г.

Вариант 1

Задача 1. Пусть Γ — граф на торе $\mathbb{T}^2$, состоящий из параллели и меридиана, U – трубчатая окрестность Γ в $\mathbb{T}^2$. Легко видеть, что $\partial U = S^1$. Какая поверхность получится при склеивании U с листом Мёбиуса по границе?

Задача 2. Классифицируйте накрытия над букетом $S^1 \vee S^2$ с точностью до эквивалентности. Опишите соответствующие накрывающие пространства.

Задача 3. Пусть X — подмножество пространства $C^\infty(S^1, S^1)$, состоящее из гомеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Докажите, что пространство X гомотопически эквивалентно S^1.

Задача 4. Найдите $\pi_3(S^4 \times S^3 \times S^2 \times S^1)$.

Задача 5. Гладкое векторное поле v на $\mathbb{T}^2$ имеет замкнутую траекторию, гомотопную нулю. Какое наименьшее число особых точек может иметь поле v? Каковы в этом случае их индексы?

Задача 6. Докажите, что в букете n окружностей существует нестягиваемый путь, который становится стягиваемым, если заклеить диском любую из окружностей.

На выполнение работы отводится 4,5 часа.

Экзамен по топологии 17 мая 1998 г.

Вариант 2

Задача 1. Пусть Γ — граф на торе $\mathbb{T}^2$, состоящий из параллели и меридиана, U – трубчатая окрестность Γ в $\mathbb{T}^2$. Легко видеть, что $\partial U = S^1$. Какая поверхность получится при склеивании двух экземпляров поверхности U по границе?

Задача 2. Классифицируйте накрытия над тором $\mathbb{T}^2$ с точностью до эквивалентности. Опишите соответствующие накрывающие пространства.

Задача 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^4$ — множество симметричных (2×2)-матриц с отрицательным определителем. Докажите, что пространство X гомотопически эквивалентно S^1.

Задача 4. Дано расслоение $p\colon E \to B$ со слоем F. Докажите равенство $\chi(E) = \chi(B)\chi(F)$.

Задача 5. Гладкое векторное поле v на $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ имеет замкнутую траекторию, гомотопную нулю, и замкнутую траекторию, не гомотопную нулю. Какое наименьшее число особых точек может иметь поле v? Каковы в этом случае их индексы?

Задача 6. Кольца Борромео образуют нетривиальное трехкомпонентное зацепление, которое становится тривиальным после удаления любой из компонент. А существует ли четырехкомпонентное зацепление с тем же свойством?

На выполнение работы отводится 4,5 часа.