С.М.Натанзон

Лекции весеннего семестра 1999 г.

§1 Комплексное дифференцирование.

Функция комплексного переменного.

Функцию комплексного переменного можно рассматривать по-разному:
$D\subset\mathbb{C},\ f:D\to\mathbb{C},\ z=(x+iy), w=(u+iv),\ w=f(z)$ — f как комплексная функция: $\mathbb{C}\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{C}$.
$w=u(x,y)+iv(x,y)$ — f как $\mathbb{R}^2\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{C}$.
$(u,v)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ — f как $\mathbb{R}^2\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2$.

Комплексная производная.

Определение. Пусть предел $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ существует и конечен. Тогда говорят, что $f'(z_0)$ есть комплексная производная f в точке z_0.

Отсюда следует непрерывность f в z_0 (как отображения $\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{R}^2$).

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)+iv(x_0+\Delta x,y_0)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z_0+i\Delta y)-f(z_0)}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)+iv(x_0,y_0+\Delta y)-\big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\big)}{i\Delta y}=$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},\text{ откуда имеем: }\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\text{ и получаем:}$$

$$\boxed{\text{Условия Коши-Римана (Cauchy-Riemann):}\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

Лемма 1.1. Если f имеет комплексную производную в z_0, то в этой точке выполнены условия К-Р.

Важные обозначения.

$\mathbb{R}^2\supset D\xrightarrow{f}\mathbb{C},\ z=x+iy,\ \overline{z}=x-iy,\ (x,y)\to(z,\overline{z})$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right);\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).}$$

Каждой $f(x,y)$ соответствует $\tilde f(z,\overline{z})$ так, что $\frac{\partial\tilde f}{\partial z}(z,\overline{z})\equiv\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)$, $\frac{\partial\tilde f}{\partial\overline{z}}(z,\overline{z})\equiv\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}+i\frac{\partial v}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Лемма 1.2. Если f удовлетворяет условиям К-Р. в z_0, то как функция $\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{C}$ для неё:

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z_0)=0\text{ и }f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

Дифференциал комплексной функции.

Лемма 1.3. Если f имеет комплексную производную в $z_0 = x_0 + iy_0$, то соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в (x_0, y_0).

Доказательство. Рассмотрим f как $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$. Положим $\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$. Тогда $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\cdot\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha(\Delta z)\Delta z$. Следовательно как функция $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$\big(u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y), v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\big) - \big(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|)$$

то есть имеет дифференциал. ■

Теорема 1.1. Функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ если и только если соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо и удовлетворяет условиям Коши-Римана.

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируема в (x_0, y_0). Тогда

$$\big(u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y), v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\big) - \big(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0)\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|),$$

где $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Поэтому для $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеем

$$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right](\Delta x + i\Delta y)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\right](\Delta x - i\Delta y) + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(\Delta x - i\Delta y) + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|)$$

Если f удовлетворяет условиям К-Р в z_0, то по лемме 1.2 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \bar{\bar{o}}(\,|\Delta z|)$ и, следовательно, f имеет комплексную производную в z_0.

Обратное утверждение следует из лемм 1.1 и 1.3. ■

Точно также, как для вещественных функций, доказываются:

Теорема 1.2. Пусть $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ и f, g имеют комплексные производные в точке z_0. Тогда $f \pm g, f \cdot g$ и, если $g(z_0) \neq 0$, то и $\frac{f}{g}$ имеют комплексную производную в точке z_0 и $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.

Теорема 1.3. Пусть $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$, где f имеет комплексную производную в точке z_0, а g – в точке $f(z_0)$. Тогда $\varphi(z) = g(f(z))$ имеет комплексную производную в z_0 и $\varphi'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

Задача 1. Доказать теоремы 1.2 и 1.3.

§2 Голоморфные функции.

Голоморфность.

Определение. Говорят, что $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, если она имеет комплексную производную в каждой точке $z \in D$. Говорят, что f голоморфна в точке z_0, если она голоморфна в некоторой окрестности $D \supseteq V \ni z_0$.

Примеры.

1. $f(z) = const$, $D \xrightarrow{f} \cdot$, $f'(z) = 0$.
2. $f(z) = az$, где $a \neq 0$. Если $a = re^{i\varphi}$, то f поворачивает на φ и растягивает в r раз.
3. $f(z) = z^n$ Увеличивает угол в n раз.
Задача 2.1. Если $f'(z) = 0$ всюду на области $D \subset \mathbb{C}$, то $f = const$ на D.
Если $f'(z_0) \neq 0$, то в малой окрестности z_0 f действует почти, как в примере 2.
Задача 2.2. Пусть $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что f сохраняет величину и направление угла между кривыми, пересекающимися в z_0.

Определение. Отображения, сохраняющие угол, называются конформными.

Ряды.

Как и в вещественном случае, можно рассматривать последовательности и ряды комплексных функций $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Все определения и теоремы дословно переносятся на комплексный случай, где вместо интервала $\{x \in \mathbb{R} \,\Big|\, |x - x_0| < r\}$ рассматривается диск $\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z - z_0| < r\}$.

Нас будут интересовать степенные ряды $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad c_n \in \mathbb{C}$.

Задача 2.3. Доказать, что, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$ сходится равномерно, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ сходится хотя бы в одной точке, то тогда он сходится равномерно и $\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z)\big)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$.

Задача 2.4. Пусть $\frac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда $f(z)$ сходится абсолютно на $D = \{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z - z_0| < R\}$ и расходится на $D = \{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |z - z_0| > R\}$. На любом компакте $K \subset D$ $f(z)$ сходится равномерно.

Положим:

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Задача 2.5. Доказать, что $e^z, \cos z, \sin z$ существуют и голоморфны на $\mathbb{C}$. Найти для каждой из них область D такую, что $f(D) = \mathbb{C}$.

§3 Комплексное интегрирование.

В вещественном случае интеграл – это предел интегральных сумм $S = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$. Если формально считать аргумент и функцию комплексным числом, то получится интеграл по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$. При этом

$$S = \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k) + iv(\xi_k)\big)(\Delta x + i\Delta y) = \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k\big) + i\big(u(\xi_k)\Delta y_k + v(\xi_k)\Delta x_k\big).$$

Определение. Интегралом функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется комплексное число

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz \overset{def}{=} \int\limits_{\gamma} (udx - vdy) + i \int\limits_{\gamma} (udy + vdx)$$

Если $w : [\alpha, \beta] \to D$ – гладкая параметризация кривой γ и $w(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(w(t))x'(t)dt - v(w(t))y'(t)dt\big) + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(w(t))y'(t)dt + v(w(t))x'(t)dt\big) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(w(t))w'(t)dt.$$

В частности, правая часть не зависит от параметризации $w(t)$.

Примеры.

1. Пусть $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, |r - a| = r\} = \{a + re^{it} \,\Big|\, t \in [0, 2\pi]\}$. Тогда $\int\limits_{\gamma} (z-a)^n\,dz = r^{n+1} i \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = \begin{cases} 0, n \neq -1 \\ 2\pi i, n = -1. \end{cases}$

2. Пусть $n \neq -1$ и $\gamma \subset \mathbb{C}$ – путь с концами a, b. Рассмотрим параметризацию $w = w(t)$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} z^n dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} w^n(t)w'(t)dt = \frac{1}{n+1}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{d}{dt}(w^{n+1}(t))\right)\,dt = \frac{1}{n+1}(w^{n+1}(\beta) - w^{n+1}(\alpha)) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

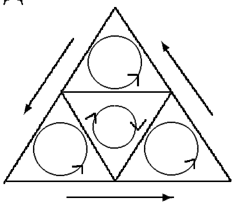
Из определения очевидна

Теорема 3.1.
$$\int\limits_{\gamma}(af+bg)\,dz = a\int\limits_{\gamma} f\,dz + b\int g\,dz, \quad \int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz.$$
При изменении ориентации γ, интеграл меняет знак. $|\int\limits_{\gamma} f\,dz| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f|\ |dz|$, где в правой части интеграл по длине дуги $\int\limits_{\alpha}^{\beta} |f|\ |z'(t)|\ dt$. В частности, если $|f(z)| \leqslant M$, то $|\int\limits_{\gamma} f\,dz| \leqslant M\,|\gamma|$, где $|\gamma|$ – длина дуги.■

§4 Теорема Коши.

Лемма 4.1. Пусть f голоморфна в области D. Тогда для любого треугольника $\Delta \subset D$ $\int\limits_{\partial\Delta} f\,dz = 0$.

Доказательство.



Итак, Пусть $|\int\limits_{\Delta} f\,dz| = M > 0$. Разобьём Δ на 4 треугольника a_1, a_2, a_3, a_4. Тогда $M = |\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{a_i} f\,dz| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}|\int\limits_{a_i} f\,dz|$. Значит, для одного из них $\Delta_1 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $|\int\limits_{\Delta_1} f\,dz| \geqslant \frac{1}{4}M$. Продолжая, находим последовательность треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$ таких, что $|\int\limits_{\Delta_n} f\,dz| \geqslant \frac{1}{4^k}M$.

Пусть $z_0 \in \bigcap \Delta_i \subset D$. Положим $\alpha(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Тогда $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(0 < |z-z_0| < \delta)$: $|\alpha(z)| < \varepsilon$. Пусть $\Delta_n \subset \{z \in \mathbb{C} \big| |z-z_0| < \delta\}$ – тогда, согласно примеру 2:

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \int\limits_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| =$$
$$= \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\partial\Delta_n} |\alpha(z)|\,|z-z_0|\,|dz| \leqslant \varepsilon\,|\partial\Delta_n|^2 = \varepsilon\left(\frac{|\partial\Delta|}{2^n}\right)^2 = \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}.$$

То есть $\frac{1}{4^n}M \leqslant \left|\int\limits_{\Delta_n} f\,dz\right| \leqslant \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$ откуда $M \leqslant \varepsilon\,|\partial\Delta|^2$ и, следовательно $M = 0$. ■

Теорема 4.1(Cauchy). Пусть $f(z)$ голоморфна на D и $\gamma \subset D$ – замкнутый путь, гомотопный нулю. Тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$.

Доказательство. Пусть γ – ломаная, состоящая из отрезков. Контур γ ограничивает область Q. Она стягиваема в точку, и следовательно может быть разбита на конечное число треугольников Δ_i. Согласно лемме 4.1, $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_{\Delta_i} f(z)\,dz = 0$. Интеграл по произвольному пути является пределом интегралов по ломаным. ■

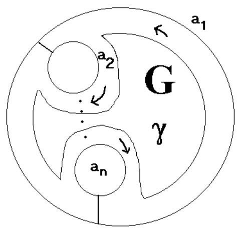
Замечание. Если известно, что $f'(z)$ непрерывна, то теорему Коши можно доказывать, используя формулу Грина (вариант формулы Стокса).

$$\int\limits_{\gamma} f\,dz = \int\limits_{\partial Q}(udx - vdy) + i\int\limits_{\partial Q}(udy + vdx) = \iint\limits_{Q}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_{Q}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

Теорема 4.2. Пусть f – голоморфна в D и $G \subset D$ – компакт, ограниченный конечным числом кривых. Тогда $\int\limits_{\partial G} f\,dz = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 4.1

$$0 = \int\limits_{\gamma} f\,dz = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_n} f\,dz = \int\limits_{\partial G} f\,dz ■$$



§5 Первообразная.

Определение. Первообразной функции $f(z)$ в области D называется голоморфная в D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$.

Задача 5.1. Пусть F – первообразная для f. Доказать, что Φ – первообразная для f если и только если $\Phi = F + const$.

Лемма 5.1. Пусть f голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z-a| < r\}$. Тогда $F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(w)\,dw$ – первообразная для f в D.

Доказательство. Пусть $z + h \in D$. Тогда, согласно лемме 4.1 и примеру 3.2:

$$F(z+h)-F(z) = \int\limits_{[a,z+h]} f(w)\,dw - \int\limits_{[a,z]} f(w)\,dw = \int\limits_{[z,z+h]} f(w)\,dw = \int\limits_{[z,z+h]} f(z)\,dw + \int\limits_{[z,z+h]} \big(f(w)-f(z)\big)\,dw =$$

$$= f(z)h + \int\limits_{[z,z+h]} (f(z)-f(w))\,dw \Rightarrow \left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leqslant \frac{1}{|h|} \int\limits_{[z,z+h]} \alpha(h)\,|dh|,$$

где $\alpha(h) = |f(z+h) - f(z)|$. Ввиду непрерывности f имеем: $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\,|h| < \delta) :\ \alpha(h) < \varepsilon$, и значит $\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon\,|h| = \varepsilon$. То есть $F'(z) = f(z)$.■

Определение. Пусть f – голоморфна в области D. Первообразной f вдоль пути $\gamma \subset D$ называется непрерывная функция $\Phi(z)$ на γ такая, что для любой $z_0 \in \gamma$ существует окрестность $z_0 \in U \subset D$ такая, что $\Phi(z)\Big|_{\gamma\cap U} = F(z)\Big|_{\gamma\cap U}$, где $F : U \to \mathbb{C}$ – первообразная для f на U.

Теорема 5.1. Пусть f голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ – непрерывный путь с началом a и концом b. Тогда f имеет первообразную $\Phi(z)$ вдоль γ, причем $\Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$.

Доказательство. Покроем γ кругами $\tilde{D}_i \subset D$ с центрами, лежащими на γ. Используя компактность γ, выберем конечное подмножество D_i. Уменьшим радиус D_i так, чтобы $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ если и только если $|i-j| = 1$. Используя лемму 5.1, выберем на D_i первообразную $\tilde{\Phi}_i(z)$. Согласно задаче 5.1 $\left(\tilde{\Phi}_{i+1}(z) - \tilde{\Phi}_i(z)\right)\Big|_{D_{i+1}\cap D_i} = const$. Положим $\Phi_1(z) = \tilde{\Phi}_1(z)$, $\Phi_2(z) = \tilde{\Phi}_2(z) + \left(\Phi_1(z) - \tilde{\Phi}_2(z)\right)\Big|_{D_1\cap D_2}$, $\Phi_3(z) = \tilde{\Phi}_3(z) + \left(\Phi_2(z) - \tilde{\Phi}_3(z)\right)\Big|_{D_2\cap D_3}$ и.т.д. Согласно задаче 5.1, все Φ_i являются первообразными на D_i и их объединение Φ даст непрерывную функцию. Если γ – ломаная, состоящая из отрезков, то $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \Phi(b) - \Phi(a)$ следует из леммы 5.1 и задачи 5.1. Непрерывный путь γ можно представить пределом таких ломаных. Предел интегралов по ломаным равен интегралу по γ и, следовательно, $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \Phi(b) - \Phi(a)$■

Теорема 5.2. Функция f, голоморфная в односвязной области D, имеет в этой области первообразную F, причем для любого пути $\gamma \subset D$ с началом a и концом в b верно $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Пусть $a \in D$. Для $z \in D$ положим $F(z) = \int\limits_{\gamma_z} f(w)\,dw$, где $\gamma_z \subset D$ соединяет a и z. Согласно теореме 4.1, определение не зависит от γ и, следовательно корректно. Согласно лемме 5.1 и теореме 5.1 $F'(z) = f(z)$ и $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(b) - F(a)$.■

§6 Интегральная формула Коши.

Теорема 6.1(о среднем). Пусть f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| \leqslant r\} \subset D$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt$$

Доказательство. $\forall(\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(\,|z-z_0|\leqslant\delta):\ |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Положим $G_\rho=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z-z_0|\leqslant\rho\}$. Согласно теореме Коши 4.2 : $0=\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz-\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}d$. Поэтому

$$f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{dz}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \text{ и } \left|f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial G_\rho}\frac{\varepsilon}{\rho}|dz|=\varepsilon$$

Следовательно, подставляя $z=z_0+re^{it}$, имеем

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\cdot(z_0+re^{it})'dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})\,dt\blacksquare$$

Теорема 6.2(Cauchy). Пусть f голоморфна в области D и $G\subset D$ – компакт, ограниченный конечным числом кривых. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\begin{cases}f(z_0), & \text{если } z_0\in G\setminus\partial G\\ 0, & \text{если } z_0\notin G.\end{cases}$$

Доказательство. Если $z_0\notin G$, то утверждение следует из теоремы Коши 4.2. Если $z_0\in G\setminus\partial G$, то рассмотрим $U=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z-z_0|\leqslant r\}\subset G\setminus\partial G$. Тогда по теореме 6.1 и 4.2 :

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(G\setminus U)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\blacksquare$$

§7 Разложение в ряд Тейлора.

Теорема 7.1. Пусть f голоморфна в области D и $G=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z-z_0|<R\}\subset D$. Тогда f совпадает на G с суммой ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ и $\gamma=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z-z_0|=r<R\}$.

Доказательство. Согласно теореме Коши 4.2, c_n не зависит от выбора $r<R$. Пусть $z\in G$ и $r>|z-z_0|$. Рассмотрим ряд $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)\left(1+\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$. Если $w\in\gamma$,то $\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{1}{|z-z_0|}\left(\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|\right)^{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{|z-z_0|}$, где $\rho=\frac{|z-z_0|}{r}<1$. Таким образом, ряд мажорируется абсолютно сходящимся и сходится равномерно по w на γ. Функция $f(w)$ ограничена на γ, и следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ также сходится равномерно по w на γ, и его можно почленно проинтегрировать. По формуле Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sum_{n=0}^{\infty}f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int\limits_\gamma\frac{f(w)}{2\pi i}\frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\blacksquare$$

Теорема 7.2. Пусть $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|c_n|}<\infty$. Тогда функция $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ существует и голоморфна в круге $D=\{z\in\mathbb{C}\Big|\ |z-z_0|<R\}$, причем $f'(z)$ также голоморфна в D.

Доказательство. Положим $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n(z-z_0)^{n-1}$. Ввиду $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\,|c_n|}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}$. Функция $\varphi(z)$ определена на D и равномерно сходится на компактах в D. Значит $\varphi(z)$ можно почленно интегрировать по путям в D. Положим $F(z)=\int\limits_{[z_0,z]}\varphi(w)dw=\int\limits_{[z_0,z]}\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n(w-z_0)^{n-1}dw=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n\int\limits_{[z,z_0]}(w-z_0)^{n-1}dw=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n\frac{1}{n}(w-z_0)^n\Big|_{w=z_0}^{w=z}=f(z)-c_0$. С другой стороны: $F(z+h)-F(z)=\int\limits_{[z,z+h]}\varphi(w)\,dw=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nc_n\int\limits_{[z,z+h]}(w-$

$z_0)^{n-1}dw = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(w-z_0)^n \Big|_z^{z+h} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\left[(z+h-z_0)^n-(z-z_0)^n\right] = h\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}+h^2g(z)$. Таким образом, $f'(z)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}=\varphi(z)$. Мы доказали, что $f'(z)$ существует и представляется рядом с теми же свойствами, что и $f(z)$. Следовательно, $f^{(2)}(z)$ тоже существует, то есть $f'(z)$ – голоморфна.■

§8 Критерий голоморфности.

Теорема 8.1. Пусть f голоморфна в области D. Тогда она имеет там комплексные производные всех порядков, они голоморфны и

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \quad \text{, где } U=\{w\in\mathbb{C}\,\Big|\,|w-z|\leqslant r\}\subset D$$

Доказательство. Пусть $z_0\in D$ и $G=\{z\in\mathbb{C}\,\Big|\,|z-z_0|\leqslant r\}\subset D$. Согласно теореме 7.1, $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ на G. Поэтому согласно теореме 7.2, $f'(z)$ голоморфна на $G\setminus\partial G$. Повторяя рассуждение, доказываем голоморфность $f^{(n)}(z)$ при всех n. Повторяя рассуждение вещественного анализа, находим, что $c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$. Сопоставив с теоремой 7.1, получим формулы для $f^{(n)}(z)$.■

Теорема 8.2. Пусть $U=\{z\in\mathbb{C}\,\Big|\,|z-a|<r\}$ и $f:U\to\mathbb{C}$. Тогда следующие 3 условия эквивалентны:

1. f голоморфна в U, то есть имеет комплексную производную в каждой точке U.
2. f непрерывна в U и интеграл по границе любого треугольника $\Delta\subset U$ равен 0.
3. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ на D.

Доказательство. (1)⇒(2) – это теорема 4.1, (1)⇒(3) – это теорема 7.1, (3)⇒(1) – это теорема 7.2. Докажем (2)⇒(1) (Теорема Морера). Положим $F(z)=\int\limits_{[a,z]}f(w)\,dw$. Тогда $F(z+h)-F(z)=\int\limits_{[z,z+h]}f(w)\,dw$ и

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\frac{1}{h}\left|\int\limits_{[z,z+h]}f(w)\,dw-hf(z)\right|\leqslant\frac{1}{h}\left|\int\limits_{[z,z+h]}(f(w)-f(z))dw\right|\leqslant\frac{1}{h}\max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\cdot h$$

Ввиду непрерывности $f(z)$: $\forall(\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(\,|w-z|<\delta)$: $|f(w)-f(z)|<\varepsilon$. Поэтому $F'(z)=f(z)$. Таким образом, $F(z)$ – голоморфна. Согласно теореме 8.1, отсюда следует голоморфность $f(z)$.■

§9 Теорема Вейерштрасса.

Лемма 9.1. Пусть функции $\{f_n(z)\}$ голоморфны в замкнутом круге $U=\{z\in\mathbb{C}\,\Big|\,|z-a|\leqslant R\}$ и ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ равномерно сходится на U. Тогда f – голоморфна и $f'(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n'(z)$.

Доказательство. Если $\gamma\subset U$ – граница треугольника, то ввиду равномерной сходимости: $\int\limits_{\gamma}f\,dz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\gamma}f_n\,dz$ и, согласно теореме 8.2, $f(z)$ – голоморфна. Согласно теореме 8.1,

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz=\sum_{n=0}^{\infty}f_n'(z)\blacksquare$$

Теорема 9.1(Weierstrass). Пусть $\{f_n(z)\}$ голоморфны в области D и $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ равномерно сходится на любом компакте в D. Тогда f – голоморфна и $f'(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n'(z)$.

Доказательство. Следует из леммы 9.1.■

§10 Функции голоморфные в кольце. Ряды Лорана.

Теорема 10.1. Пусть $f(z)$ голоморфна в кольце $V = \{0 \leqslant r < |z-a| < R \leqslant \infty\}$. Тогда на V

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \text{ и } \gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} \Big| \, |z-a| = \rho\} \subset V$$

Доказательство. Пусть $z \in V$ и $U = \{w \in V \Big| \alpha \leqslant |w-a| \leqslant \beta\} \ni z$. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)}dw = f_\beta(z) - f_\alpha(z), \text{ где}$$

$$f_\beta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\beta} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\beta} f(w)\frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\beta} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{w-z}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}dw = -\int\limits_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}dw = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \blacksquare$$

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется рядом Лорана. $\sigma_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ – его правильная часть, $\sigma_2 = \sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ – его главная часть.

Теорема 10.2. Ряд Лорана задает функцию, голоморфную в кольце $V = \{z \in \mathbb{C} \Big| r < |z-a| < R\}$, где $r = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$ и $R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Доказательство. По теореме Абеля σ_1 и σ_2 сходятся равномерно на любом компакте в V. По теореме Вейерштрасса сумма голоморфна.$\blacksquare$

Теорема 10.3(Единственность и неравенство Коши). Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ голоморфна в $V = \{z \Big| r < |z-a| < R\}$ и $\gamma_\rho = \{z \Big| \, |z-a| = \rho\} \subset V$.

$$\text{Тогда } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \text{ и } |c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}, \text{ где } M = \max_{\gamma_\rho} |f|$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \int\limits_{\gamma_\rho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i c_n$$

Таким образом $|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{\rho^{n+1}}|dz| = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.\blacksquare$

Теорема 10.4(Liouville). Если функция голоморфна на всей плоскости и ограничена, то она постоянна.

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $|f| \leqslant M$. Тогда по неравенству Коши $|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}$ для всех $\rho > 0$.$\blacksquare$

§11 Изолированные особые точки.

Определение. Точка $a \in \mathbb{C}$ – изолированная особая точка $f(z)$, если она голоморфна в некоторой проколотой окрестности a. Она называется устранимой, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, полюсом, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ и существенно особой в остальных случаях.

Теорема 11.1. Пусть a – изолированная особая точка функции $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Тогда

1. a – устранима $\iff$ $|f(z)| \leqslant M$ в некоторой окрестности a $\iff$ $c_n = 0$ при $n < 0$.

2. a – полюс $\iff$ $c_n = 0$ при $n < N < 0$ и $c_N \neq 0$.

Доказательство. 1. Пусть в некоторой окрестности a : $|f(z)| \leqslant M$. По неравенству Коши $|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n}$ при $\rho < R$, отсюда $c_n = 0$ при $n < 0$, и следовательно, a – устранима.
2. Пусть в некоторой окрестности $|f(z)| > 0$, тогда: $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна, особенность устранима, и $\varphi(z) = (z-a)^N \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_0 \neq 0$. Следовательно $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^{-N} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, где $b_0 \neq 0$. Обратное очевидно.■

Определение. Если $f(z) = (z-a)^N \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $c_0 \neq 0$, то при $N > 0$, N называется порядком нуля, а при $N < 0$, число $-N$ называется порядком полюса.
Задача 11.1. f имеет полюс порядка N в a $\iff$ f^{-1} имеет 0 порядка $-N$ в a.
Теорема 11.2(Сохоцкий). Пусть a – существенная особая точка функции f и $A \in \mathbb{C}\cup\infty$. Тогда существует $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) \to A$.

Доказательство. Пусть $A = \infty$. Тогда утверждение теоремы следует из неограниченности f в любой окрестности точки a. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Тогда или 1) $\exists a_n \to a$, где $f(a_n) = A$ или же 2) $\exists$ окрестность a, где $f(z) \neq A$. В последнем случае, в этой окрестности функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ голоморфна, и a – ее существенная особая точка. Значит, как уже доказано $\exists a_n \to a$, где $\varphi(a_n) \to \infty$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(A + \frac{1}{\varphi(a_n)}\right) = A$.■

Определение. Говорят, что ∞ – изолированная особая точка $f(z)$, если f – голоморфна в некоторой окрестности $\{R < |z| < \infty\}$ точки ∞. Для них та же классификация: устранимая, полюс, существенно особая.
Задача 11.2. ∞ – изолированная особая точка $f(z)$ $\iff$ 0 – изолированная особая точка $g(z) = f(z^{-1})$.

Определение. Функция голоморфная на всем $\mathbb{C}$ называется целой. Если f не имеет на $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$ других точек неголоморфности, кроме устранимых и полюсов, то говорят, что f мероморфна на D.
Задача 11.3. Если f – мероморфна на $\overline{\mathbb{C}}$, то она рациональна, то есть $f(z) = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$.

§12 Вычеты и Интегралы в смысле главного значения.

Далее, если не оговорено противное, все контуры считаются ориентированными против часовой стрелки.

Определение. Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определена в области U и $\gamma = \{z \in \mathbb{C}\,\Big|\, |z-z_0| = r\} \subset U$. Тогда величина $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ называется вычетом f.

Теорема 12.1. Пусть $f(z)$ голоморфна в области D, всюду кроме изолированных особых точек, $G \subset D$ – компактное подмножество и ∂G не содержит особых точек. Тогда $\int\limits_{\partial G} f(z)\,dz = \sum\limits_j \operatorname*{res}\limits_{z_j} f$, где сумма берется по всем особым точкам $z_i \in G$.

Доказательство.

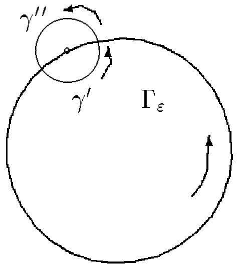
Согласно теореме 4.2: $\displaystyle\int\limits_{\partial G} f(z)\,zd - \sum_j \int\limits_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0,$

где $\gamma_j \subset G$ – замкнутый контур, окружающий точку z_j.■
Пусть теперь $\Gamma = \partial G$ содержит изолированные особые точки.

Определение. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ определена в $U \setminus z_0$ и $z_0 \in \Gamma \subset U$. Положим $G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}\,\Big|\, |z-z_0| \leqslant \varepsilon\}$ и $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus G_\varepsilon$. Тогда $v.p.\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ называется интегралом по Γ в смысле главного значения.

Теорема 12.2. Пусть $\mu(z)$ – голоморфна в проколотой окрестности z_0, $|\mu(z) - \mu(z_0)| \leqslant const\,|z-z_0|$ *(условие Липшица)* и $z_0 \in \Gamma$, где Γ – гладкая кривая. Тогда $v.p.\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{\mu(z)}{z-z_0}dz = \pi i\mu(z_0) + \int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz.$

Доказательство.



Можно считать, что Γ – замкнута. Положим $\gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| = \varepsilon\} = \gamma' \cup \gamma''$, где $\gamma' \cap \gamma'' \subset \Gamma$.

Тогда $\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z - z_0} = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z - z_0} = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \int\limits_{\gamma'} \frac{\mu(z_0)}{z - z_0} dz$

Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z - z_0} = \int\limits_{\Gamma} \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \pi i \mu(z_0)$.■

Определение. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в $U = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| > R\}$ и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| = r\} \subset U$ – ориентирован против часовой стрелки. Тогда $\operatorname{res}\limits_{\infty} f = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz$ называется вычетом в ∞.

Теорема 12.3. Пусть $f(z)$ голоморфна всюду на $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{res}\limits_{z_i} f = 0$.

§13 Принцип аргумента.

Определение. В случае, если f имеет в z_0 нуль(или полюс) порядка n, будем говорить, что f имеет в z_0 n нулей (соответственно, n полюсов).

Теорема 13.1. Пусть f мероморфна в области D и $\Gamma \subset D$ – непрерывная кривая, ограничивающая область G. Пусть N – число нулей, а P – число полюсов f в области G, причем $\partial G = \Gamma$ не содержит особых точек. Тогда $N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Доказательство. Пусть $\gamma \subset G$ – контур в окрестности точки z_0. Тогда, если $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, то $f'(z) = (z - z_0)^{n-1} \left((z - z_0)\varphi'(z) + n\varphi(z)\right)$ и $\frac{f'}{f} = \frac{1}{z - z_0} \left(n + (z - z_0)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)$. Таким образом $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = n$. По теореме Коши $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ равен сумме всех интегралов вида $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} dz$, построенных по точкам z_0, где $n \neq 0$. Следовательно, $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$.■

Напомним, что число $\varphi \in [0, 2\pi)$ называется аргументом числа $u = re^{i\varphi}$. Обозначается $\arg u$. Если u – обходит Γ, один раз против часовой стрелки, f определена на Γ и $f\Big|_{\Gamma} \neq 0$, то $e^{i \arg f(u)}$ обходит $S = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| = 1\}$ целое число раз, обозначаемое $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f$.

Теорема 13.2(Принцип аргумента). В предположениях теоремы 13.1 $N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$.

Доказательство. Продеформируем Γ в малые контуры γ вокруг нулей и полюсов $f(z)$, и отрезки, соединяющие их с Γ (см рис к т-ме 4.2). Отрезки проходятся дважды в противоположных направлениях и вклад в $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$ не дают. Следовательно, $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$ равно сумме $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f(z)$ по таким γ. Если γ – маленький контур в окрестности точки z_0, где $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f(z) = n$.■

Теорема 13.3 (Rouché) . Пусть f и g голоморфны в замкнутой области $\overline{G}$ с непрерывной границей ∂G. Пусть $|f(z)| > |g(z)|$ на ∂G. Тогда функции f и $f + g$ имеют в G одинаковое число нулей.

Доказательство. Положим $F_\lambda = f + \lambda g$. При $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$: $F_\lambda \Big|_{\partial G} \neq 0$. Следовательно $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F_\lambda(z)$ существует, непрерывна, и значит постоянна. В частности,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F_0(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta\Gamma \arg F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z))■$$

Следствие 13.4 (Основная Теорема Алгебры). Многочлен степени n имеет в $\mathbb{C}$ n корней.

Доказательство. $P_n = a_n z^n + \cdots + a_0 = f(z) + g(z)$, где $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Применим теорему Руше при большом R на $\{z \in \mathbb{C} \Big| |z| = R\}$.■

§14 Топологические свойства мероморфных функций.

Лемма 14.1. Пусть $f(z) = w_0 + (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $1 \leqslant n$, φ – голоморфна в D и $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда существуют области $z_0 \in U \subset D$ и $w_0 \in W \subset f(U)$, такие что W – открытое множество, и для любого $w \in W \setminus w_0$, $f^{-1}(w) \cap U$ состоит из n точек.

Доказательство. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| \leqslant r\}$ – область, где $\varphi(z) \neq 0, U = D \setminus \partial D$ и $\mu = \min\limits_{z \in \partial D} |f(z) - w_0| > 0$. Положим $W = \{w \in \mathbb{C} \Big| |w - w_0| < \mu\}$. Если $w \in W \setminus w_0$, то $f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$, где на ∂D: $|f(z) - w_0| \geqslant \mu$, $|w_0 - w| < \mu$. По теореме Руше $f(z) - w$ имеет n корней на U. То есть f принимает на U значение $w \neq w_0$ $n \geqslant 1$ раз.■

Теорема 14.1 (Сохранение области). Если f голоморфна в области D и $f \neq const$, то $f(D)$ – тоже область.

Доказательство. Согласно лемме 14.1, для всякой точки $z_0 \in D$ существует окрестность W точки $w_0 = f(z_0)$, такая что $W \subset f(D)$.■

Определение. Функция f называется однолистной, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.

Теорема 14.2 (Критерий однолистности). Голоморфная функция f однолистна в некоторой окрестности точки z_0 тогда и только тогда когда $f'(z_0) \neq 0$.

Доказательство. Согласно лемме 14.1, обратимость f в окрестности z_0 эквивалентна равенству $f(z) = w_0 + (z - z_0)\varphi(z)$, где $\varphi(z_0) \neq 0$. Но это эквивалентно $f'(z_0) \neq 0$.■

Задача 14.1. Доказать, что обратная g к однолистной функции f тоже однолистна и $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Теорема 14.3 (Принцип максимума модуля). Если функция $f \neq const$ голоморфна в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то $|f|$ достигает максимума на ∂D.

Доказательство. Пусть $|f|$ достигает максимума в $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда, согласно лемме 14.1 $W = \{z \in \mathbb{C} \Big| |w - w_0| < r\} \subset f(D)$ для некоторого r, и следовательно существуют $w = f(z), z \in D$ такие что $|f(z)| = |w| > |w_0|$.■

Теорема 14.4 (Schwartz Lemm). Пусть f голоморфна на $U = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| < 1\}, f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$. Тогда $|f(z)| \leqslant |z|$, и если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \neq 0$, то $f(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$.

Доказательство. Функция $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ голоморфна на каждом $U_r = \{z \in \mathbb{C} \Big| |z| \leqslant r\}, r < 1$. Согласно теореме 14.3, $\max\limits_{z \in U_r} |\varphi(z)| \leqslant \max\limits_{z \in \partial U_r} |\frac{f(z)}{z}| \leqslant \frac{1}{r}$. Отсюда $|\varphi(z)| \leqslant 1$ и $|f(z)| \leqslant |z|$. Если $|f(z_0)| = |z_0|$, то $|\varphi(z_0)| = 1$, и согласно теореме 14.3, $\varphi(z) = const$. То есть $f(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$.■

§15 Непрерывные функционалы на компактных семействах функций.

Определение. Семейство функций $\{f\}$ называется равномерно ограниченным внутри области D, если для любого компакта $K \subset D$ существует константа $M = M(K)$, такая что $|f(z)| \leqslant M$ для всех $f \in \{f\}, z \in K$.

Задача 15.1. Если семейство голоморфных функций $\{f\}$ равномерно ограничено внутри D, то семейство $\{f'\}$ также равномерно ограничено внутри D. (Указание: Воспользоваться формулой Коши).

Определение. Семейство функций $\{f\}$ называется равностепенно непрерывным внутри области D, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset D$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$, такое что для любых $(z_1, z_2 \in K, |z_1 - z_2| < \delta)$ и для всех $f \in \{f\}$ выполняется $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Задача 15.2. Если семейство функций $\{f\}$ голоморфных в области D, равномерно ограничено в области D, то оно равностепенно непрерывно внутри D. (Указание: Воспользоваться задачей 15.1).

Определение. Последовательность функций на D назовем фундаментальной, если она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset D$.

Теорема 15.1 (Montel). Пусть $\{f\}$ семейство голоморфных функций равномерно ограниченных внутри D. Тогда из каждой последовательности $\{f_n\} \subset \{f\}$ можно выбрать фундаментальную.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Q} = \{z_1, z_2, \ldots\}$ – множество всех рациональных точек в D. Выберем из последовательности f_n подпоследовательность f_n^1, такую что $f_n^1(z_1)$ сходится. Выберем из последовательности f_n^1 подпоследовательность f_n^2, такую что $f_n^2(z_2)$ сходится и.т.д. … Положим $h_n = f_n^n$. Тогда $h_n(z_p)$ сходится при любом p. Докажем фундаментальность h_n. Пусть $K \subset D$ – компакт, тогда, согласно задаче 15.2, существует покрытие множества K квадратиками, такое что, если z' и z'' принадлежат одному квадратику, то $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ввиду компактности K квадратики можно выбрать в конечном числе. Выберем в каждом из них по точке из $\mathbb{Q}$. Получим точки $z_1, \dots, z_p$. Ввиду сходимости $h_n(z_k)$, по Критерию Коши существует N, такое что $|h_m(z_i) - h_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n, m > N$ и всех i. Таким образом, если z_k лежит в том же квадратике, что и z, то $|h_m(z) - h_n(z)| \leqslant |h_m(z) - h_m(z_k)| + |h_m(z_k) - h_n(z_k)| + |h_n(z_k) - h_n(z)| < \varepsilon$ и по критерию Коши $h_n(z)$ равномерно сходится на K. ■

Определение. Семейство функций $\{f\}$ называется компактным, если из любой последовательности $\{f_n\} \subset \{f\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к функции $f_* \in \{f\}$ на каждом компакте $K \subset D$.

Определение. Отображение $J : \{f\} \to \mathbb{C}$ называется функционалом. Он называется непрерывным, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\} \subset \{f\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} J(f_n) = J\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$.

Задача 15.3. Пусть $\{f\}$ – семейство функций голоморфных в области $D \ni a$. Доказать, что $J(f) = f^{(p)}(a)$ – непрерывный функционал.

Теорема 15.2. Пусть J - непрерывный функционал на компакте $\{f\}$. Тогда существует $f_0 \in \{f\}$, такая что $|J(f_0)| \geqslant |J(f)|$ для всех $f \in \{f\}$

Доказательство. Пусть $A = \sup\limits_{f\in\{f\}} |J(f)|$. Тогда существует $\{f_n\} \subset \{f\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} |J(f_n)| = A$. Ввиду компактности существует $\{h_m\} \subset \{f_n\}$ и $f_0 \in \{f\}$, такие что h_m сходится к f_0 равномерно на каждом компакте. Ввиду непрерывности $A = \lim\limits_{n\to\infty} |J(f_n)| = \lim\limits_{m\to\infty} |J(h_m)| = |J(f_0)|$ ■

§16 Теорема Гурвица и однолистные функции.

Теорема 16.1 (Hurwitz). Пусть $\{f_n\}$ – голоморфные функции в области D и f_n сходится к $f \neq const$ равномерно на любом компакте $K \subset D$. Пусть $f(z_0) = 0$. Тогда $\forall(r > 0)\exists(N)\forall(n > N)$ f_n имеет ноль в области $\{z \in D \,\Big|\, |z - z_0| < r\}$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса(9.1) $f(z) = (z - z_0)^p(a + \varphi(z))$, где $a \neq 0, \varphi(z)$ – голоморфна и $\varphi(z_0) = 0$. Поэтому существует ρ, такое что $|f(z)| > 0$ на $Q = \{0 < |z - z_0| \leqslant \rho\}$. Поскольку $\{f_n\}$ равномерно сходится на ∂Q, то $\exists(N)\forall(n > N)\forall(z \in \partial Q)$: $|f_n(z) - f(z)| < \mu$, где $\mu = \min\limits_{\partial Q} |f(z)| > 0$. По теореме Руше(13.3) $f_n = f + (f_n - f)$ имеет в Q ноль. ■

Теорема 16.2. Пусть последовательность $\{f_n\}$ однолистных на области D функций сходится к $f \neq const$ равномерно на каждом компакте $K \subset D$. Тогда f – однолистна.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f – голоморфна. Пусть $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2)$. Положим $Q = \{z \in D \,\Big|\, |z - z_1| < |z_2 - z_1|\}$. Предел $h(z) = f(z) - f(z_2)$ последовательности $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$, такой что $h(z_1) = 0$. По теореме 16.1 существует N и $z_0 \in Q$, такие что $h_N(z_0) = 0$. Но тогда $f_N(z_0) = f_N(z_2)$, что противоречит однолистности f_N. ■

Теорема 16.3. Пусть S – семейство всех голоморфных однолистных функций на области D, таких что $|f| \leqslant 1$ и пусть S содержит непостоянную функцию. Тогда существует $f_0 \in S$ и $a \in D$, такие что $0 < |f_0(a)|$ и $|f'(a)| \leqslant |f_0'(a)|$ для всех $f \in S$.

Доказательство. По условию существует $f_1 \in S$ и $a \in D$, такие что $|f_1'(a)| > 0$. Положим $S_1 = \{f \in S \,\Big|\, |f'(a)| \geqslant |f_1'(a)|\}$. Согласно теореме Монтеля(15.1), из каждой последовательности $\{f_n\} \subset S_1$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. По теореме Вейерштрасса её предел g – аналитическая функция, такая что $|g'(a)| \geqslant |f_1'(a)| > 0$, то есть $g \neq const$. Согласно теореме 16.2, отсюда следует, что g – однолистна, то есть $g \in S_1$. Таким образом, S_1 – компакт. Согласно задаче 15.3, $|f'(a)|$ – непрерывный функционал на S_1. Согласно теореме 15.2, он достигает максимума на $f_0 \in S_1$. То есть $|f_0'(a)| \geqslant |f'(a)|$ для всех $f \in S$. ■

§17 Аналитическое продолжение.

Определение. Каноническим элементом называется пара (U_a, f_a), где $f_a(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i(z - a)^i$ и U_a – круг с центром в a, в котором ряд сходится. Канонические элементы (U_a, f_a) и $\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ считаются эквивалентными, если $f_a\Big|_{U_a \cap \tilde{U}_a} = \tilde{f}_a\Big|_{U_a \cap \tilde{U}_a}$

Определение. Пусть (U_a, f_a) и (U_b, f_b) – канонические элементы и $\gamma \subset \mathbb{C}$ – путь, соединяющий a и b. Говорят, что (U_b, f_b) является аналитическим продолжением (U_a, f_a) вдоль пути γ, если существуют точки $a = a_1, a_2, \ldots, a_k = b \in \gamma$ и канонические элементы (U_{a_i}, f_{a_i}), где $(U_{a_1}, f_{a_1}) = (U_a, f_a)$ и $(U_{a_k}, f_{a_k}) = (U_b, f_b)$, такие что $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}$, $U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}} \neq \emptyset$ и $f_{a_i}\Big|_{U_{a_i}\cap U_{a_j}} = f_{a_j}\Big|_{U_{a_i}\cap U_{a_j}}$.

Задача 17.1. Доказать, что все аналитические продолжения (U_a, f_a) вдоль γ эквивалентны.

Теорема 17.1. Пусть γ_0 и γ_1 – гомотопные пути с одинаковыми концами a и b, и $\gamma_t(t \in [0,1])$ – гомотопия между ними. Пусть (U_a, f_a) – канонический элемент, имеющий аналитическое продолжение $(U_{a_i^t}, f_{a_i^t})$ вдоль каждого γ_t. Тогда аналитические продолжения (U_a, f_a) вдоль γ_0 и γ_1 эквивалентны.

Доказательство. Пусть T – множество таких $t \in [0,1]$, что аналитическое продолжения вдоль γ_0 и γ_t эквивалентны. Множество T – открыто, поскольку при t' достаточно близких к t: $\gamma_{t'} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i^t}$ и следовательно аналитическое продолжение вдоль $\gamma_{t'}$ можно построить с помощью $U'_{a_i^t} \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i^t}$. По очевидным причинам T – замкнуто. Значит $T = [0,1]$.■

Задача 17.2. Показать, что при нарушении условия существования аналитического продолжения вдоль каждого γ_t теоремы 17.1, аналитические продолжения вдоль γ_0 и γ_1 могут не быть эквивалентными.

§18 Теорема Римана.

Задача 18.1. Если $|a| < 1$, $|b| < 1$, то $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

Теорема 18.1. Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ – односвязная область, дополнение к которой содержит более одной точки. Тогда существует голоморфная однолистная функция $f : D \to \Lambda = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$, такая что $f(D) = \Lambda$.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C} \setminus D$. Функция $f = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$ принимает в $a \in D$ два значения и порождает два канонических элемента (U_a^1, f_a^1) и (U_a^2, f_a^2). Соединим произвольную точку $b \in D$ с точкой a путем $\gamma \subset D$. Пусть (U_b^i, f_b^i) – аналитическое продолжение (U_a^i, f_a^i) вдоль γ. Согласно теореме 17.1, (U_b^i, f_b^i) не зависит от γ. Таким образом, существуют аналитические функции $f^i : D \to \mathbb{C}$, такие что $f_b^i = f^i\Big|_{U_b}$ для всех $b \in D$ и $f^2 = -f^1$. Положим $D_i = f^i(D)$. Если $f^i(z_1) = \pm f^i(z_2)$, то $\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$, откуда $z_1 = z_2$. Таким образом, f^i – однолистны и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Согласно теореме сохранения области(14.1), D_2 содержит круг $W = \{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w - w_0| < \rho\}$. Положим $\tilde{f}(z) = \frac{\rho}{f^1(z)-w_0}$. Ввиду $W \cap D_1 = \emptyset$, имеем $|f^1(z) - w_0| \geqslant \rho$. То есть $\tilde{f} \neq const$ – аналитична, однолистна и $|\tilde{f}(z)| \leqslant 1$. Пусть S – множество всех однолистных функций $g : D \to \Lambda$. Тогда $\tilde{f} \in S$, и согласно теореме 16.3, существуют $a \in D$ и $f_0 \in S$, такие что $|g'(a)| \leqslant |f_0'(a)| > 0$ для всех $g \in S$. Докажем, что $f_0(D) = \Lambda$. Положим $h(z) = \dfrac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)}f_0(z)}$. Тогда $h(z)$ – однолистна и, согласно задаче 18.1, $|h(z)| \leqslant 1$. Следовательно, $h \in S$ и $|f_0'(a)| \geqslant |h'(a)| = \frac{1}{1-|f_0(a)|^2}|f_0'(a)|$ и, следовательно, $f_0(a) = 0$. Пусть теперь $b \in \Lambda \setminus 0$. Докажем, что $f_0(D) \ni b$. Предположим, что $b \notin f_0(D)$. Положим $\psi(z) = \sqrt{\dfrac{f_0(z) - b}{1 - \overline{b}f_0(z)}}$. Продолжая ее аналитический элемент (U_a, ψ_a^1), построим аналитическую функцию ψ^1 на D. Положим $h(z) = \dfrac{\psi^1(z) - \psi^1(a)}{1 - \overline{\psi^1(a)}\psi^1(z)}$. Она однолистна и, согласно задаче 18.1, $|h(z)| \leqslant 1$, то есть $h \in S$. Но тогда $|f_0'(a)| \geqslant |h'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}|f_0'(a)| > |f_0'(a)|$. Следовательно, $b \in f_0(D)$.■

§19 Автоморфизмы односвязных областей.

Определение. Взаимно-однозначное голоморфное отображение $\alpha : D_1 \to D_2$ называется (би) голоморфным изоморфизмом. В таком случае говорят, что D_1 и D_2 биголоморфно изоморфны.

Задача 19.1. Доказать, что в этом случае и $\alpha^{-1} : D_2 \to D_1$ тоже голоморфный изоморфизм.

Определение. Голоморфный изоморфизм $\alpha : D \to D$ называется автоморфизмом.

Задача 19.2. Доказать, что суперпозиция отображений задает структуру группы $\mathrm{Aut}(D)$ на множестве голоморфных автоморфизмов области D.

Согласно теореме Римана, любая односвязная область $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ биголоморфно изоморфна $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, $\mathbb{C}$ или $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$.

Задача 19.3. Доказать, что $\{z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \,\Big|\, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$.

Теорема 19.1. $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \,\Big|\, a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0\}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az+b \,\big|\, a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$

$$\mathrm{Aut}(\Lambda) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \,\Big|\, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Доказательство. Как очевидно $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \,\big|\, f(\infty) = \infty\}$. Пусть $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда $f(a) = \infty$ для $a \in \mathbb{C}$. Согласно теоремам 11.1 и 12.1, $f(z) = \frac{A}{z-a} + \varphi(z)$, где φ – голоморфна. Кроме того $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$ и по теореме Лиувилля(10.4), $\varphi(z) = const$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \frac{A}{z-a} + B \,\big|\, A, B, a \in \mathbb{C}, A \neq 0\}$. Если $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, то $f(z^{-1}) \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ и, как уже доказано, $f(z^{-1}) = \frac{A}{z} + B$. Отсюда $f(z) = Az + B$, где $A \neq 0$. Пусть $f \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ и $f(a) = 0$. Положим $\varphi(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ и $g(z) = f(\varphi^{-1}(z))$. Тогда, согласно задаче 19.3, $g \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$, где $g(0) = 0$. Применим лемму Шварца(14.4) к g и g^{-1} находим, что $|g(z)| = |z|$. Отсюда по лемме Шварца $g(z) = e^{i\alpha}z$.■

Задача 19.4. Доказать, что $\mathrm{Aut}(\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \,\big|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0\}$

§20 Римановы поверхности. Униформизация.

Определение. Риманова поверхность — это одномерное комплексное многообразие. То есть

1. Поверхность M (двухмерное топологическое многообразие)
2. Голоморфный атлас карт, то есть набор $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, где $U_\alpha \subset M$ – открыта и односвязна, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$, $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ однолистна (т.е. $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ при $x \neq y$) и $f_\beta f_\alpha^{-1}\Big|_{f(U_\alpha)\cap f(U_\beta)}$ – голоморфна.

Атлас называют также комплексной структурой.

Пример . Область $M \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Определение. Римановы поверхности $(M, \{(U_\alpha^1, f_\alpha^1)\})$ и $(M, \{(U_\alpha^2, f_\alpha^2)\})$ считаются одинаковыми, если объединение атласов $\{(U_\alpha^1, f_\alpha^1), (U_\beta^2, f_\beta^2)\}$ – тоже атлас.

Определение. Римановы поверхности $(M^1, \{(U_\alpha^1, f_\alpha^1)\})$ и $(M^2, \{(U_\alpha^2, f_\alpha^2)\})$ считаются биголоморфно эквивалентными (изоморфными), если существует гомеоморфизм $\varphi : M^1 \to M^2$ голоморфный во всех картах. То есть, если $(M^1, \{(U_\alpha^1, f_\alpha^1)\})$ и $(M^1, \{(\varphi^{-1}U_\alpha^2, \varphi f_\alpha^2)\})$ совпадают.

Задача 20.1. Докажите, что $\mathbb{C}$ не биголоморфно эквивалентно Λ.

Определение. Функция $f : P \to \mathbb{C}$ на римановой поверхности $P = (M, \{U_a, f_a\})$ называется голоморфной, если $ff_a^{-1} : f_a(U_a) \to \mathbb{C}$ – голоморфная функция при всех a.

Теорема Униформизации. (H.Poincaré, P.Koebe, 1907, 22th Hilbert's problem).

Всякая односвязная риманова поверхность биголоморфно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ или $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$.

Теорема 20.1. Всякая риманова поверхность биголоморфно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus 0$, тору $\mathbb{C}/\Gamma$ или Λ/Γ, где $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ – дискретная группа, действующая без неподвижных точек.

Доказательство. Из теоремы униформизации и стандартных фактов топологии следует, что всякая риманова поверхность биголоморфно эквивалентна W/Γ, где $W \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \Lambda\}$ и $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(W)$ – дискретная группа, действующая без неподвижных точек. Каждый $A \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ имеет неподвижные точки. Среди $A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ неподвижные точки отсутствуют лишь у параллельных переносов. Дискретная группа параллельных переносов порождается одной или двумя образующими. Таким образом, $\mathbb{C}/\Gamma$ или цилиндр $\mathbb{C} \setminus 0 = f(\mathbb{C})$, где $f(z) = e^{\frac{2\pi i z}{b}}$, или тор.■

Вместо Λ можно рассматривать биголоморфно эквивалентную ей полуплоскость $U = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

§21 Фуксовы группы.

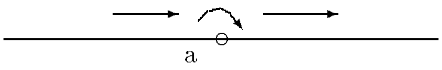
Задача 21.1. Доказать, что $\mathrm{Aut}(U)$ совпадает с группой движений метрики $ds = \dfrac{|dz|}{|\mathrm{Im}\, z|}$. Эта метрика задает на U геометрию Лобачевского.
Пусть $A \in \mathrm{Aut}(U)$, то есть $Az = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. Его неподвижные точки являются корнями z_1, z_2 уравнения $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.
Автоморфизм A называется:

1. Эллиптическим, если $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$. В этом случае $z_2 = \overline{z}_1$ и A имеет одну неподвижную точку в U.

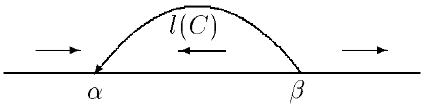
2. Параболическим, если $z_1 = z_2$. В этом случае $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$ и у A нет неподвижных точек на U, и лишь одна на $\mathbb{R} \cup \infty$. *Пример:* $z \mapsto z + b$.

3. Гиперболическим, если $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае у A также нет неподвижных точек на U, зато целых две на $\mathbb{R} \cup \infty$. *Пример:* $z \mapsto \lambda z$.

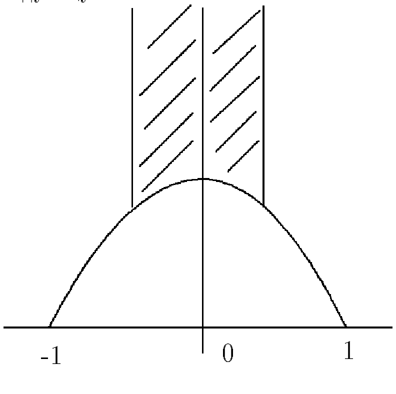
Задача 21.2. Доказать, что всякий параболический автоморфизм с неподвижной точкой $a \in \mathbb{R}$ сопряжен в $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ с $z \mapsto z + 1$ и имеет вид $Cz = \dfrac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)}$. Если $\gamma > 0$, то $C(r) > r$ в окрестности a.



Задача 21.3. Доказать, что всякий гиперболический автоморфизм с неподвижными точками $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сопряжен в $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ с $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$ и имеет вид $Cz = \dfrac{(\lambda a - \beta)z + (1-\lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)}$. При этом, если $\lambda > 1$, то α – притягивающая, а β – отталкивающая неподвижная точка. Соединяющая их полуокружность $l(C)$ инвариантна относительно C. (инвариантная прямая геометрии Лобачевского).



Определение. Дискретная подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(U)$ называется фуксовой группой.
Пример 21.1. $\Gamma = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \Big| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc > 0\} = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ – модулярная группа.
Задача 21.4. Найти простые образующие и фундаментальную область модулярной группы. Указание, рассмотреть следующую область:



§22 Пространство модулей комплексных торов.

Определение. Множество классов биголоморфной эквивалентности римановых поверхностей одинакового топологического типа называется пространством модулей.
Задача 22.1. Пусть $W \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, U\}$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{Aut}(W)$ – дискретная группа, действующая без неподвижных точек. Доказать, что W/Γ_1 и W/Γ_2 биголоморфно эквивалентны если и только если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в $\mathrm{Aut}(W)$, то есть $\Gamma_1 = A\Gamma_2 A^{-1}$ для $A \in \mathrm{Aut}(W)$.

Теорема 22.1. Пространство модулей комплексных торов естественно отождествляется с пространством U/Γ, где Γ – модулярная группа.

Доказательство. Согласно теореме 20.1, комплексный тор – это $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – группа параллельных переносов, порожденная переносами на вектора $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$ причем $\frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{R} \cup \infty$. Согласно задаче 22.1, можно считать, что $f_2 = 1$ и $\operatorname{Im} f_1 > 0$, то есть $f_1 \in U$. Векторы $(1, \tau)$ и $(1, f_1)$ порождают одну и ту же дискретную группу если и только если $K \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), K \in \mathbb{C}$, то есть $f_1 = \dfrac{a + b\tau}{c + d\tau}$.■

Следствие 22.1. Пространство модулей комплексных торов имеет естественную структуру комплексной плоскости.

§23 Аналитические функции.

Определение. Аналитической функцией называется множество $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$ аналитических продолжений канонического элемента (U_a, f_a) по всем путям, выходящим из $a \in \mathbb{C}$. Две аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы один совпадающий канонический элемент.

Определение. Рассмотрим теоретико-множественное объединение V множеств U_b^α, то есть совокупность пар (z, U_b^α), где $z \in U_b^\alpha$. Будем считать, что точки (z, U_b^α) и $(\tilde{z}, U_{\tilde{b}}^{\tilde{\alpha}})$ эквивалентны, если $z = \tilde{z}$ и $f_b^\alpha = f_{\tilde{b}}^{\tilde{\alpha}}$ в некоторой окрестности $z = \tilde{z}$. Множество P_f, получающееся из V отождествлением эквивалентных точек, называется римановой поверхностью аналитической функции $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$. Соответствие $(z, U_b^\alpha) \mapsto z$ задает отображение $\varphi_f : P_f \to \mathbb{C}$.

Задача 23.1. Докажите, что φ_f является локальным гомеоморфизмом.

Задача 23.2. Множество $\{(U_b^\alpha, f_b^\alpha)\}$ можно рассматривать как атлас на P_f. Докажите, что этот атлас определяет структуру римановой поверхности на P_f, относительно которой φ_f – голоморфное отображение.

Соответствие $(z, U_b^\alpha) \mapsto f_b^\alpha(z)$ определяет функцию $f : P_f \to \mathbb{C}$. Таким образом аналитическая функция $\iff (P, f)$, где P – риманова поверхность, $f : P \to \mathbb{C}$ – голоморфное отображение.

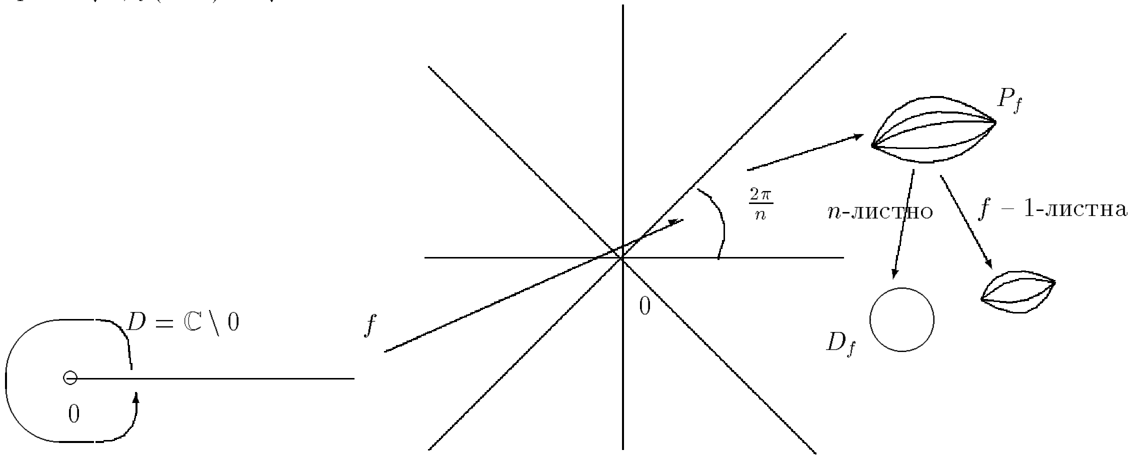
Задача 23.3. Докажите, что функция f голоморфна. Таким образом, риманову поверхность P_f можно рассматривать как естественную область определения "многозначной" аналитической функции f, на которой f становится однозначной.

Пусть Λ_f – односвязная накрывающая P_f, $\psi_f : \Lambda_f \to P_f$ – естественная проекция и $f_\Lambda = f\psi_f$.

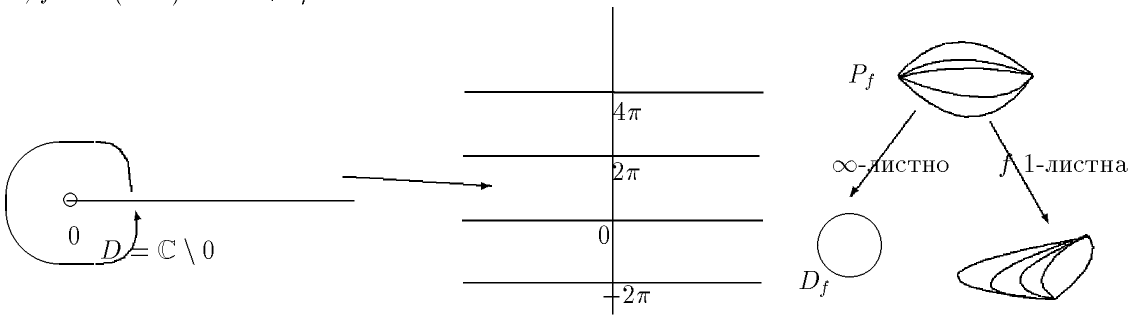
Задача 23.4. Докажите, что P_f биголоморфно эквивалентна Λ_f/Γ_f, где $\Gamma_f = \{g \in \operatorname{Aut}(\Lambda_f) \,\big|\, f_\Lambda g = f_\Lambda\}$.

§24 Примеры римановых поверхностей аналитических функций.

1. Корень $\sqrt[n]{z}$, $f(re^{i\varphi}) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}$.

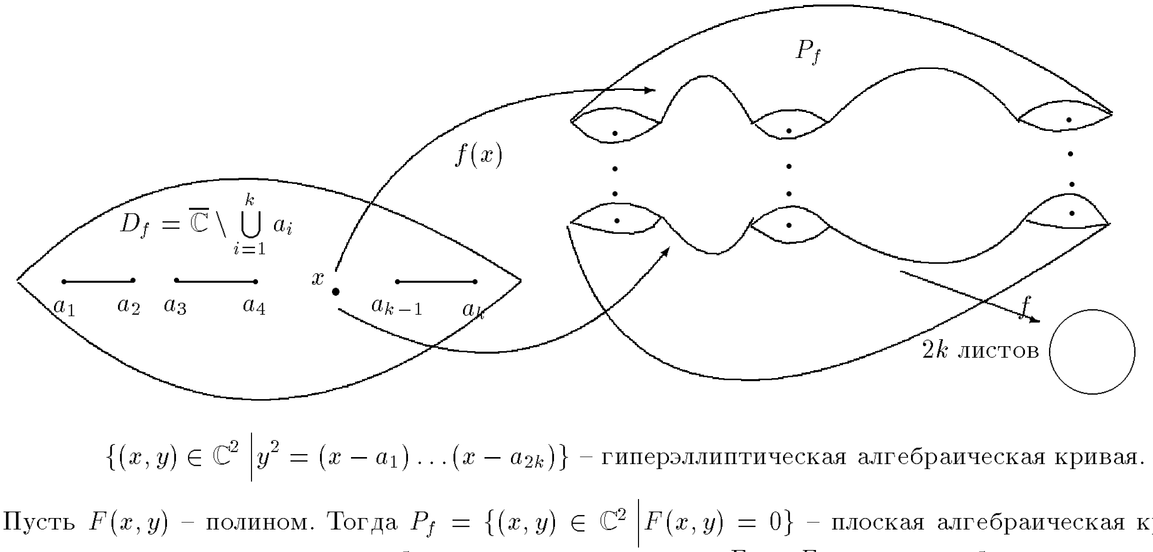


2. $\ln z$, $f = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$.



3. $z^a = e^{a \ln z}$ – сюръекция, и риманова поверхность та же, что и у ln.
4.

$$f(x) = \sqrt{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2k})}$$



$$\left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, y^2 = (x - a_1)\ldots(x - a_{2k})\right\} \text{ – гиперэллиптическая алгебраическая кривая.}$$

Пусть $F(x, y)$ – полином. Тогда $P_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, F(x, y) = 0\right\}$ – плоская алгебраическая кривая. Это компактная риманова поверхность без конечного числа точек.Если F – полином общего положения степени g, то род P_f равен $\frac{g(g-1)}{2}$. Для других F род меньше, и так получаются все компактные римановы поверхности. Поэтому компактная риманова поверхность $\Longleftrightarrow$ комплексная алгебраическая кривая, с точностью до бирациональных замен (x, y).

Определение. Множество пар (P, f), где P – компактная риманова поверхность, $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ – голоморфное отображение, называется пространством Гурвица.