Математический Колледж НМУ   Комплексный анализ, 4 семестр

Экзамен 17–24 сентября 2001 г.

(лекции С.М.Натанзона, семинары Ю.М.Бурмана и С.А.Локтева)

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1. *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен* **И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО**
2. *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Работы нужно сдать в учебную часть до 20.00 в понедельник, 24 сентября.

1. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами, $z_1, \dots, z_n$ — его корни (все различные), а $a_1, \dots, a_{n-1}$ — корни его производной. а) Докажите, что каждая точка a_i лежит внутри выпуклой оболочки точек $z_1, \dots, z_n$. б) Докажите, что если $n = 3$, то $\frac{1}{2}(|a_1|^2 + |a_2|^2) \leqslant \frac{1}{3}(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$.

2. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

3. Нарисуйте на комплексной плоскости множество $\{z \in \mathbb{C} \mid z^4 + 2z^2 + 2 \in T\}$, где T — отрезок мнимой оси с концами в точках $-i$ и i. Докажите, что Ваш рисунок — топологически правильный.

4. Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n / a_n$, где a_n — число решений уравнения $\sin nz = z$, удовлетворяющих условиям $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant 1, |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 1$.

5. а) Докажите, что существует голоморфная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая при каждом $z \in \mathbb{C}$ условиям $f(z+1) = f(z)$, $f(z+i) = e^{-2\pi i z} f(z)$. б) Докажите, что функция f единственна с точностью до пропорциональности. в) Сколько нулей имеет функция f в множестве $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leqslant 1/2, |\mathrm{Im}(z)| \leqslant 1/2\}$?