Задачи по группам Ли 1.

1. Докажите, что группа Ли, диффеоморфная S^1, изоморфна S^1.

2. Связная компонента единицы G_0 группы Ли G является нормальной подгруппой в G.

3. Дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли G содержится в центре G.

4. Фундаментальная группа связной группы Ли абелева.

5. На верхней полуплоскости $\mathcal{H}$ не существует структуры голоморфной группы Ли.

6. Какому многообразию диффеоморфна универсальная накрывающая группы $SL_2(\mathbb{R})$?

7. Найдите все гомоморфизмы между одномерными группами Ли.

Задачи по группам Ли 2.

1. Пусть $|X| = d$. Найдите $l_n(d) = \dim L_n(X)$.

2. Выпишите слагаемые степени ≤ 5 в ряде Кэмпбелла-Хаусдорфа-Дынкина.

3. Для любой нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует нильпотентная группа Ли G такая, что

a) $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.

b) G диффеоморфна $\mathbb{R}^{\dim(\mathfrak{g})}$.

c) Умножение и обращение задаются полиномиальными функциями на G.

4. (a) Для группы $GL_n(\mathbb{C})$ экспонента сюръективна, но не открыта и не инъективна.

(b) Для группы $SL_2(\mathbb{R})$ экспонента не сюръективна.

5. (a) Если алгебра Ли связной группы Ли G коммутативна, то и группа G коммутативна.

(b) Любая связная коммутативная группа Ли над $\mathbb{R}$ является прямым произведением групп $\mathbb{R}$ и S^1.

(c) Любая связная компактная группа Ли над $\mathbb{C}$ коммутативна.

6. Пусть группа Ли G имеет дискретный центр Z. Тогда группа G/Z имеет тривиальный центр.

7*. (a) Докажите равенство $exp(X + tY)exp(X) = exp(t\alpha(ad(X))Y + o(t))$. где $\alpha(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.

(b) Экспонента является гомеоморфизмом в окрестности точки X тогда и только тогда, когда собственные значения $ad(X)$ не равны $2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.