Задачи по группам Ли 3.

1. Опишите все вещественные группы Ли размерности ≤ 3.

2. (a) Группа автоморфизмов односвязной группы Ли имеет естественную структуру группы Ли.

(b) Группа внутренних автоморфизмов односвязной группы Ли является виртуальной подгруппой в группе всех автоморфизмов.

(c)* Приведите пример, когда группа внутренних автоморфизмов не является подгруппой Ли.

3. Докажите, что центр связной нильпотентной группы Ли имеет положительную размерность.

4. Найдите группу компонент ($= G/G^0$) псевдоортогональной группы $O_{k,l}(\mathbb{R})$ (то есть группы, сохраняющей невырожденную квадратичную форму сигнатуры (k,l)).

5. (a) Алгебры Ли групп SU_2 и SO_3 изоморфны.

(b) Группа SU_2 односвязна.

(c) Постройте гомоморфизм $SU_2 \to SO_3$.

6. Докажите, что $\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7*. Приведите пример группы Ли, коммутант которой не является подгруппой Ли.

Задачи по группам Ли 4.

1. Группа Ли называется *унимодулярной*, если левоинвариантная мера Хаара на ней является правоинвариантной. Докажите, что

(a) Связная группа G унимодулярна тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tr}(ad(x)) = 0$ для всех $x \in \mathrm{Lie}(G)$.

(b) Дискретная группа унимодулярна.

(c) Компактная группа унимодулярна.

(d)* Приведите пример неунимодулярной группы.

2. Форма Киллинга компактной алгебры Ли неположительно определена. Форма Киллинга компактной полупростой алгебры Ли отрицательно определена.

3. Сколько имеется связных компактных групп размерности 4?

4. Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Группа ее автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L)$ является группой Ли и $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(L)) = \mathrm{Der}(L)$ (алгебра Ли дифференцирований алгебры L).

5. Придумайте компактные группы с алгебрами Ли типов A_n, B_n, C_n, D_n.

6*. Найдите все компактные формы алгебры Ли sl_2.

7. Для любой компактной группы G существует её накрытие $\tilde{G}$, такое, что $\tilde{G} = (S^1)^r \times G_1$, где $\mathrm{Lie}(G_1)$ — полупроста.