Алгебраическая геометрия, листок №1–2

1. Существует ли такой морфизм $\varphi\colon X \to Y$ неприводимых аффинных многообразий, что $\varphi(X)$ не открыто и не замкнуто в Y?

2. Пусть C — кривая в $\mathbb{A}^2$, заданная уравнением $y^2 = x^3$. Докажите, что рациональное отображение из C в $\mathbb{P}^1$, заданное формулой $(x, y) \mapsto (x : y)$, не является морфизмом.

3. Докажите, что следующие пары многообразий неизоморфны:
а) гипербола $\{\,(x, y) \in \mathbb{A}^2 : xy = 1\,\}$ и $\mathbb{A}^1$; б) полукубическая парабола $\{\,(x, y) \in \mathbb{A}^2 : y^2 = x^3\,\}$ и $\mathbb{A}^1$; в) $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1, 3\}$; г*) полукубическая парабола из пункта (б) и кривая на плоскости, заданная уравнением $y^2 = x^5$.

4. Пусть C — кривая $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$. Может ли прямая пересечь кривую C в трех различных точках?

5*. Докажите, что однородный идеал многообразия Сегре

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

порождается своей компонентой степени 2.

6. Рассмотрим диагональное отображение $\mathbb{P}^n$ в многообразие Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$. Что за подмногообразие в $\mathbb{P}^{n^2+2n}$ будет образом этого отображения?

7. Докажите, что $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ неизоморфно $\mathbb{P}^3$.

8. Существуют ли неприводимые многообразия X, Y и Z такие, что $X \subset Z$, $Y \subset Z$, $X \cap Y \neq \varnothing$ и при этом $\dim(X \cap Y) < \dim X + \dim Y - \dim Z$?

9. Приведите пример аффинного многообразия, на котором можно ввести две различные структуры группы.

10*. $C \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая плоская кривая (над полем $\mathbb{C}$) такая, что почти для всех прямых $L \subset \mathbb{P}^2$ наборы точек $C \cap L$ проективно эквивалентны. Докажите, что $\deg C \leqslant 3$. «Для почти всех» означает «для всех $L \in (\mathbb{P}^2)^*$, не лежащих в некотором замкнутом по Зарисскому множестве, отличном от всего $(\mathbb{P}^2)^*$».

11**. Морфизм $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ задается формулой $(x_0 : x_1) \mapsto (x_0^4 : x_0^3 x_1 : x_0 x_1^3 : x_1^4)$. Положим $C = f(\mathbb{P}^1)$. Можно ли задать кривую $C \subset \mathbb{P}^3$ (как подмножество $\mathbb{P}^3$) двумя однородными уравнениями?