Алгебраическая геометрия, листок №3

1. Пусть X и Y — проективные многообразия, A — абелево многообразие. Докажите, что для всякого морфизма $h\colon X\times Y\to A$ существуют морфизмы $f\colon X\to A$ и $g\colon Y\to A$ такие, что $f(x,y)=g(x)+h(y)$.

2. Докажите, что при $m>n$ не существует непостоянного морфизма из $\mathbb{P}^m$ в $\mathbb{P}^n$.

3. Пусть $f\colon X\to Y$ — сюръективный морфизм проективных многообразий, причем Y неприводимо и все слои f неприводимы. Докажите, что X неприводимо.

4. Рассмотрим $\mathbb{P}^n$ как проективизацию пространства однородных многочленов степени n от двух переменных X и Y. Имея в виду это отождествление, рассмотрим отображение $\varphi\colon(\mathbb{P}^1)^n\to\mathbb{P}^n$, ставящее в соответствие n-ке линейных форм $(f_1,\dots,f_n)$ их произведение $f_1\dots f_n$.

Пусть

$$\Delta=\{(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{P}^1)^n : x_i=x_j \quad \text{для некоторых } i,j\in[1;n]\}.$$

Докажите, что $\varphi(\Delta)\subset\mathbb{P}^n$ — неприводимая гиперповерхность; найдите ее степень.

5. Пусть $X=\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^N$, где $N=mn+m+n$, — многообразие Сегре. При каком минимальном r многообразие секущих $S^r(X)$ совпадает со всем $\mathbb{P}^N$?

6. Пусть $C=v_n(\mathbb{P}^1)\subset\mathbb{P}^n$. Найдите степень гиперповерхности $C^*\subset(\mathbb{P}^n)^*$.

7. Пусть $Q\subset\mathbb{P}^n$ — неособая гиперповерхность степени 2 (как говорят, неособая *квадрика*).

а) Найдите размерность семейства прямых, лежащих на X.

б) Будет ли это семейство неприводимо?

8. Пусть $X\subset\mathbb{P}^N$ — неприводимое проективное многообразие, такое, что $\dim X=n$ и X содержит $(2n-2)$-мерное семейство прямых. Докажите, что X совпадает с каким-то линейным подпространством $\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^N$.

9. а) Пусть $X\subset\mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, $C\subset X$ — замкнутое подмножество положительной размерности, $H\subset\mathbb{P}^n$ — гиперплоскость, касающаяся X в каждой точке C. Докажите, что C содержит хотя бы одну особую точку гиперповерхности X.

б) Если положить бублик на тарелку, то нетрудно заметить, что плоскость может касаться тора вдоль окружности, при том, что тор — неособая поверхность. Объясните кажущееся противоречие с пунктом (а).

10*. Докажите теорему Клебша: общая тернарная квартика (однородный многочлен степени 4 от трех переменных) *не* представляется в виде суммы пяти четвертых степеней линейных форм (вопреки тому, что дает наивный подсчет размерностей).

11*. Пусть $\mathbb{P}^9$ параметризует формы третьей степени от трех переменных с точностью до постоянного множителя. Обозначим через $X\subset\mathbb{P}^9$ гиперповерхность, соответствующую формам, *не* задающим неособую кривую в $\mathbb{P}^2$. Найдите $\deg X$.