Алгебраическая геометрия, листок №4

1. Пусть $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{mn+m+n}$ — многообразие Сегре, и пусть $x \in SX$ — общая точка его многообразия секущих. Опишите многообразие $\Sigma_x \subset X$ (многообразие концов секущих, проходящих через x).

2. Найдите значения всех «дефектов секущих» $\delta_i(X)$ для случая, когда X — многообразие Сегре. Тот же вопрос для случая, когда $X = v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{n(n+3)/2}$.

3. Пусть $C \subset \mathbb{P}^n$ — проективная кривая, не лежащая в гиперплоскости. Докажите, что $\dim S^iC = \min(2i+1, n)$, где S^iC — i-е многообразие секущих.

4. Приведите пример кубической формы от двух переменных над $\mathbb{C}$, не представимой в виде суммы двух кубов линейных форм.

5. Пусть X — неприводимое квазипроективное многообразие, $x \in X$, $\sigma\colon \bar{X} \to X$ — раздутие, $E = \sigma^{-1}(X)$. Докажите, что в $\bar{X}$ существует такое открытое по Зарисскому множество $U \supset E$, что единственными проективными подмногообразиями X, лежащими в U, являются само E и точки.

6. Пусть $x \in \mathbb{P}^n$. Множество прямых в $\mathbb{P}^n$, содержащих x, отождествим с проективным пространством $\mathbb{P}^{n-1}$. Пусть $\Pi = \{\,(x,l) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in l\,\}$ (иными словами, Π — раздутие $\mathbb{P}^n$ в точке). Докажите, что Π неизоморфно ни $\mathbb{P}^n$, ни $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$.

7. а) Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность, заданная уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

и пусть в особой точке $x \in X$ гессиан $\det \left\| \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \right\|$ отличен от нуля. Пусть $\sigma\colon \bar{X} \to X$ — раздутие X в точке x. Докажите, что все точки $\sigma^{-1}(E)$ неособы на $\bar{X}$. Докажите также, что x — изолированная особая точка гиперповерхности X.

б) Сформулируйте и докажите обобщение этого результата на следующую ситуацию: $\mathbb{A}^n$ заменяется на многообразие Y, неособое в точке x, f — функция на Y, зануляющаяся в точке x (каков аналог условия на гессиан?), $X \subset Y$ задано уравнением $f = 0$.

8. Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ — поверхность, заданная уравнением $x^2+y^2+z^{n+1} = 0$, где $n \geq 1$. Начало координат — ее единственная особая точка (так называемая *особенность типа* A_n). Сколько потребуется раздутий, чтобы разрешить эту особенность? Что за кривая будет прообразом начала координат (после всех этих раздутий)?

9. Те же вопросы про поверхность, заданную уравнением $x^2z+y^2+z^3 = 0$ (особенность D_4).

10. Опишите двойственные к следующим проективным многообразиям:
а) квадрика в $\mathbb{P}^n$ (не обязательно неособая);
б) многообразие Веронезе $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{n(n+3)/2}$;
в) многообразие Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$;
г) многообразие Сегре $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$;
д) невырожденное многообразие $X \subset \mathbb{P}^n$, являющееся конусом над многообразием $Y \subset \mathbb{P}^{n-1}$.