Алгебраическая геометрия, листок №5

1. Приведите пример двух проективных многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}^N$ таких, что их джойн $J(X,Y)$ отличен от всего $\mathbb{P}^N$, но при этом $\dim J(X,Y) < \dim X + \dim Y + 1$.

2. Пусть X и Y — проективные многообразия, причем $X \cap Y = \varnothing$. Докажите, что

$$\deg J(X,Y) = \frac{\deg X \cdot \deg Y}{\sigma},$$

где J обозначает джойн, а σ — число прямых, проходящих через общую точку $z \in J(X,Y)$ и лежащих на $J(X,Y)$.

3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, причем $\langle X \rangle = \mathbb{P}^n$. Докажите, что множество гиперплоскостей

$$\Sigma = \{\, \alpha \in (\mathbb{P}^n)^* : \dim\langle X \cap H_\alpha \rangle < n-1 \,\}$$

является замкнутым.

4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, причем $\langle X \rangle = \mathbb{P}^n$. Докажите, что для общей гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^n$ выполнено равенство

$$\langle X \cap H \rangle = H.$$

5. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Докажите, что при $d \geq \deg X$ многообразие $v_d(X)$ является пересечением квадрик.

6. Пусть $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ — многообразие Сегре. Докажите, что пересечение X с общим $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ является нормальной рациональной кривой степени 3.

7. Найдите степень многообразия Сегре $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b \subset \mathbb{P}^{ab+a+b}$.

8*. Пусть $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — неубывающая последовательность целых неотрицательных чисел, $S_A \subset \mathbb{P}^{a_0+\cdots+a_n+n}$ — соответствующий scroll.

1) Докажите, что всякое гиперплоское сечение scroll'а — тоже scroll.
2) Докажите, что S^A является линейным сечением многообразия Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}^{2N+1}$, где $N = a_0 + \cdots + a_n - 1$.
3) Пусть $B = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ –неубывающая последовательность целых неотрицательных чисел. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы многообразие S_B было гиперплоским сечением многообразия S_A.

9*. Докажите, что многообразие Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}^{2N+1}$ не является, при $N > 1$, гиперплоским сечением проективного многообразия, отличного от конуса.

10. Пусть X — алгебраическое многообразие. Докажите, что $x \mapsto \dim \Theta_x X$ — полунепрерывная сверху функция от x ($\Theta_x X$ — касательое пространство Зарисского).

11. Приведите пример неприводимого одномерного замкнутого подмножества $C \subset \mathbb{A}^n$, которое нельзя вложить в виде замкнутого подмножества в $\mathbb{A}^{n-1}$. В примере должно быть $n > 3$.