**Алгебраическая геометрия, листок №6**

1. Пусть $X$ — гладкое (неприводимое) проективное многообразие, $Y \subset X$ — замкнутое подмножество, причем $X \setminus Y \cong \mathbb{A}^n$. Докажите, что $\dim Y = n-1$.

2. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — гладкая $n$-мерная квадрика, где $n \geq 3$. Докажите, что $\mathrm{Pic}(Q) \cong \mathbb{Z}$.

3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое проективное многообразие над полем характеристики 0. Докажите, что гиперплоскость $H_\alpha$, где $\alpha \in X^*$ — общая точка, касается $X$ вдоль линейного пространства.

4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое проективное многообразие над полем характеристики 0. Докажите, что двойственное многообразие к $v_r(X)$, где $r > 1$, является гиперповерхностью.

5. Пусть $m$ — целое число, свободное от квадратов. Какие элементы поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ целы над $\mathbb{Z}$?

6. Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ — поверхность, заданная уравнением $x^2+y^2+z^3=0$. Будет ли факториально кольцо $\mathcal{O}_{x,X}$, где $x$ — начало координат?

7. Пусть $X_m$ — конус над рациональной нормальной кривой степени $m$. Докажите, что раздутие $X_m$ в вершине конуса изоморфно scroll'у $S_{1,m+1}$.

8. Опишите образ проективной плоскости при отображении линейной системой коник, проходящих через две данные точки; тот же вопрос — для линейной системы коник, проходящих через точку $p$ и касающихся прямой $L \ni p$.

9. Докажите, что раздутие гладкой двумерной квадрики в точке изоморфно раздутию проективной плоскости в двух точках.