Алгебраическая геометрия, листок №7

1. Пусть $F_1, \dots, F_m$ — однородные многочлены от $X_0, \dots, X_n$, где $m < n$, и пусть $\deg F_j = d_j$. Докажите, что при фиксированных d_j и общих $F_1, \dots, F_m$ подмногообразие $\mathbb{P}^n$, заданное уравнениями $F_1 = \dots = F_m = 0$, является неприводимым, неособым и $(n-m)$-мерным.

2. Пусть кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ — трансверсальное пересечение двух квадрик (алгебраические геометры предпочитают говорить «полное пересечение»). Докажите, что C изоморфна плоской кубической кривой.

3. а) Пусть $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ — фиксированная прямая, $d > 1$ — целое число. Докажите, что общая гиперповерхность степени d, содержащая $\mathbb{P}^1$, будет неособа.

б) Верно ли аналогичное утверждение, в котором прямая $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ заменена на плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^4$?

4. Приведите пример неособой кривой $C \subset \mathbb{P}^3$, не лежащей ни на одной квадрике.

5. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — неособая неприводимая кривая. Докажите, что при всех достаточно больших d существует неособая поверхность степени d, содержащая C.

6. Пусть X — неособое многообразие над полем характеристики 0, и пусть $\mathcal{L}$ — линейная система на X. Предположим, что для всякой точки $x \in X$ существует дивизор $D \in \mathcal{L}$ такой, что либо $D \not\ni x$, либо D неособ в точке x.

Докажите, что в этом случае общий дивизор из $\mathcal{L}$ либо неособ, либо все его особенности аналитически изоморфны особенностям вида $x_1x_2 + f(x_3, \dots, x_n) = 0$.

7. Останется ли верным «принцип специализации Энриквеса» (если $f\colon X \to Y$ — собственный морфизм, общий слой которого связен, и если Y неособо, то все слои f связны), если из его формулировки убрать слово «собственный»?

8. Выведите «вторую теорему Бертини» (если $f\colon X \to \mathbb{P}^n$ — морфизм проективного неприводимого многообразия X в проективное пространство и если $L \subset \mathbb{P}^n$ — такое линейное подпространство, что $\dim f(X) + \dim L > n$, то $f^{-1}(L)$ связно) из принципа специализации Энриквеса.

9. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое проективное многообразие. Докажите, что либо $\dim TX = \dim SX$, либо $\dim SX = 2\dim X + 1$ (SX — многообразие секущих, TX — многообразие касательных).