**Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.**
**Листок № 1.**

1) Доказать, что отображение множества $M$ в множество $N$ является инъективным (сюръективным) тогда и только тогда, когда оно имеет левое (соотв. правое) обратное отображение.

2) Пусть $G$ — группа движений правильного шестиугольника. а) Найти порядок группы $G$. б) Найти все точки плоскости, для которых порядок стабилизатора в группе $G$ больше 1.

3) Под группой многогранника мы будем понимать группу *вращений* многогранника. Найти порядок стационарной группы вершины и порядок всей группы для а) группы диэдра; б) группы тетраэдра; в) группы куба; г) группы икосаэдра.

4) Сколько существует различных ожерелий из 6 бусин, каждая из которых может быть красного, синего или желтого цвета?

   (Указание: использовать теорему Бернсайда).

5) Для групп диэдра $D_3$, тетраэдра $T$, куба $C$ и икосаэдра $I$ найти, каким симметрическим или знакопеременным группам они изоморфны.

6) Пусть $\{1,\ldots,n\} = I_1 \sqcup I_2 \sqcup \cdots \sqcup I_k$ — разбиение множества $\{1,\ldots,n\}$ на орбиты перестановки $\sigma \in S_n$. Определим *декремент* перестановки формулой

$$d(\sigma) = \sum_{l=1}^{k}(|I_l| - 1) = n - k.$$

   а) Доказать, что знак перестановки $\sigma$ равен $(-1)^{d(\sigma)}$.

   б) Доказать, что перестановку $\sigma$ можно представить в виде произведения $d(\sigma)$ транспозиций.

   в) Доказать, что перестановку $\sigma$ нельзя представить в виде произведения менее чем $d(\sigma)$ транспозиций.

7) Пусть $\sigma \in S_n$ — цикл длины $k$, а $\tau \in S_n$ — произвольная перестановка. Доказать, что $\tau\sigma\tau^{-1}$ — цикл длины $k$. Какие элементы входят в этот цикл, если $\sigma = (1, 2, \ldots, k)$?

8) Доказать, что симметрическая группа $S_n$ порождена транспозицией $(12)$ и циклом $(123\ldots n)$.

9) Найти классы сопряженных элементов для а) группы диэдра $D_n$;

   б) симметрической группы $S_n$.