Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 10.

1) Обозначим через Conj функтор $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, переводящий векторное пространство V в комплексно-сопряженное пространство $\overline{V}$ (пространство $\overline{V}$ совпадает с V как множество, а умножение на $x \in \mathbb{C}$ в $\overline{V}$ задается как умножение на $\overline{x}$ в V). Пусть $\mathrm{Compl} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — функтор комплексификации, $\mathrm{Real} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}$ — функтор овеществления, а $\mathrm{Id} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — тождественный функтор. Доказать, что функтор $\mathrm{Compl} \circ \mathrm{Real}$ изоморфен функтору $\mathrm{Id} \oplus \mathrm{Conj}$.

2) Отождествим тензорное произведение $V^* \otimes V$ с $\mathrm{Hom}(V, V)$. Как описать отображение $\mathrm{Hom}(V, V) \to \mathbb{k}$, отвечающее свертке тензоров? Какому оператору из $\mathrm{Hom}(V, V)$ отвечает свертка (как элемент двойственного пространства $\mathrm{Hom}(V, V)^*$) при каноническом изоморфизме $\mathrm{Hom}(V, V)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, V)$ (см. задачу 9 из прошлого листка)?

3) Доказать, что любое $GL(V)$-эквивариантное (то есть перестановочное с действием $GL(V)$) линейное отображение $V^* \otimes V \to \mathbb{k}$ пропорционально отображению свертки.

4) Найти жорданову нормальную форму матрицы оператора $A \otimes B$, если матрицы операторов A и B имеют соответственно жорданову нормальную

форму:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5) Пусть $\Bbbk$ — подполе поля $\mathbb{F}$. Построить канонические изоморфизмы

   а) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F} \otimes V, \mathbb{F} \otimes W) \cong \mathbb{F} \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$,
   б) $(\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} V) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} W) \cong \mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} (V \otimes_{\Bbbk} W)$,

   где через $\otimes_{\Bbbk}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\otimes_{\mathbb{F}}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\mathbb{F}$.

6) Доказать, что $\mathbb{C}$-алгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ изоморфна матричной алгебре $M_2(\mathbb{C})$.