Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 2.

1) Доказать, что если порядок любого неединичного элемента группы G равен двум, то группа G — абелева. Привести пример такой группы более чем из двух элементов.

2) Пусть G — произвольная группа, $a, b \in G$, причем порядок их произведения ab равен n. Каким может быть порядок элемента ba?

3) Доказать, что а) группы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^*_+$ изоморфны; б) группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ неизоморфны; в) группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}^*$ неизоморфны.

4) Доказать, что если подгруппа $H \subset G$ имеет индекс 2, то она нормальна.

5) Найти все нормальные подгруппы групп а) S_3; б) S_4.

6) Доказать, что $S_4/V_4 \cong S_3$, где $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ — «четверная группа Клейна».

7) Доказать, что если A — циклическая группа порядка n и d — делитель n, то A содержит ровно одну подгруппу порядка d, причем эта подгруппа циклическая.

8) Доказать, что любая группа четного порядка содержит хотя бы один элемент порядка 2.

9) Найти $Z(G)$, $\mathrm{Int}\, G$, $\mathrm{Aut}\, G$ для а) группы μ_n комплексных корней из единицы степени n при $n = 2, 3, 4, 5, 6$; б) группы диэдра D_n при $n = 3, 4$; в)* симметрической группы S_4; г)* знакопеременной группы A_4.

10) Доказать, что симметрическая группа S_n изоморфна группе, заданной образующими $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ и соотношениями $s_i^2 = e$ (для $i = 1, \ldots, n-1$), $(s_i s_{i+1})^3 = e$ (для $i = 1, \ldots, n-2$) и $(s_i s_j)^2 = e$ (для $|i-j| > 1$)
а) при $n = 3$; б)* при любом n.

11) Перечислить все группы порядка $\leqslant 6$ с точностью до изоморфизма.

12) Доказать, что для любой группы G группа ее внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}\, G$ является нормальной подгруппой группы всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$.

13)* Пусть p — наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы G, $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Доказать, что H — нормальная подгруппа в G.