Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 3.

1) Доказать, что любая подгруппа, содержащая коммутант, нормальна.

2) Доказать, что центр группы порядка p^n содержит более одного элемента (p — простое число, $n \in \mathbb{N}$).

3) Существуют ли неабелевы группы порядка p^2?

4) Пусть G — группа верхних унитреугольных матриц порядка 3 с элементами из поля $\mathbb{F}_3$. Найти порядок группы G, её центр и классы сопряженных элементов.

5) Может ли быть циклической а) факторгруппа некоммутативной группы по ее центру? б) группа всех автоморфизмов некоммутативной группы?

6) Сколько силовских 2-подгрупп в S_4?

7) Найти коммутанты групп а) S_3; б) A_4; в) D_4; г) S_4; д) D_5.

8) а) Доказать, что коммутант любой нормальной подгруппы группы G является нормальной подгруппой группы G.

б) Верно ли, что любая нормальная подгруппа коммутанта группы G является нормальной подгруппой группы G?

9) Пусть p, q — простые числа, $p < q$.

а) Доказать, что если p не делит $q-1$, то любая группа порядка pq — абелева. Сколько их (с точностью до изоморфизма)?

б) Доказать, что если p делит $q-1$, то существует неабелева группа порядка pq. Сколько их (с точностью до изоморфизма)?

10) Доказать разрешимость любой группы порядка

а) p^n, где p — простое число, $n \in \mathbb{N}$;

б) pq, где p, q — различные простые числа;

в) $p^2 q$, где p, q — различные простые числа;

г) $n < 60$.

11) Доказать, что группа A_5 проста.