Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 5.

1) Найти все инварианты представления колчана из одной стрелки (между двумя разными вершинами).

2) Найти все неразложимые представления колчана — цепочки из трех вершин и двух стрелок между ними (для всевозможных ориентаций).

3) Будем классифицировать с точностью до изоморфизма всевозможные тройки подпространств, то есть наборы $(V; V_1, V_2, V_3)$, где V — векторное пространство над полем $\Bbbk$, а V_1, V_2, V_3 — подпространства пространства V.

   а) Пусть $U = U_1 = U_2 = U_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

   б) Пусть $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U = U_1 = U_2 = V_1 \cap V_2$, $U_3 = 0$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

   в) Пусть $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = 0$. Положим $U_1 = V_1 \cap (V_2 + V_3)$, $U_2 = V_2 \cap (V_1 + V_3)$, $U_3 = V_3 \cap (V_1 + V_2)$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Доказать, что $(U; U_1, U_2, U_3)$ выделяется прямым слагаемым в $(V; V_1, V_2, V_3)$.

   г) Описать все (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.

д) Доказать, что в любое разложение данной тройки подпространств на неразложимые входят одни и те же (с точностью до изоморфизма) неразложимые тройки подпространств.

е) Какие численные инварианты однозначно определяют класс изоморфизма данной тройки подпространств?

4) Сопоставим каждому (неориентированному) графу Γ с вершинами $v_1, \dots, v_n$ квадратичную функцию $q_\Gamma(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром}, \\ 0, & \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром.} \end{cases}$$

а) Доказать, что если функция q_Γ положительно определена, то граф Γ не содержит циклов, то есть каждая связная компонента его является деревом.

б) Доказать, что если функция q_Γ неотрицательно определена, то каждая связная компонента графа Γ — либо дерево, либо замкнутая цепочка.

в) Описать все связные графы, для которых функция q_Γ положительно определена; неотрицательно определена.