Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 6.

1) Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования по x в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ вещественных многочленов от x степени меньшей $n+1$. То же для оператора сдвига $f(x) \mapsto f(x+a)$.

2) Построить все композиционные ряды $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

3) Пусть n — натуральное число.

   а) Какие простые $\mathbb{Z}$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

   б) Для каких n $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ разлагается в прямую сумму простых $\mathbb{Z}$-модулей?

4) Какие простые $\mathbb{C}[x]$-модули и с какой кратностью входят в композиционный ряд $\mathbb{C}[x]$-модуля $V = \mathbb{C}^3$, в котором x действует матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$?

5) Доказать, что любой ненулевой гомоморфизм простого модуля в простой модуль обратим.

6) Пусть A и B — квадратные матрицы над полем $\Bbbk$. Доказать, что минимальный многочлен блочно-диагональной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов матриц A и B.

7) Пусть V — конечный модуль над произвольным кольцом R. Он называется *полупростым*, если для любого подмодуля $U \subseteq V$ найдется дополнительный подмодуль W, то есть такой подмодуль $W \subseteq V$, что $V = U \oplus W$. Доказать, что

   а) любой подмодуль полупростого модуля полупрост;

   б) модуль полупрост тогда и только тогда, когда он является прямой суммой некоторых своих простых подмодулей;

   в) прямая сумма полупростых модулей — полупростой модуль.

8) Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Линейный оператор в пространстве V называется полупростым, если для любого инвариантного подпространства U найдется дополнительное инвариантное подпространство W, то есть такое, что $V = U \oplus W$. Доказать, что оператор полупрост тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе диагональна.