Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 7.

1) Найти жорданову форму матрицы A и выяснить геометрический смысл соответствующего линейного оператора, если а) $A^2 = E$; б) $A^2 = A$.

2) Доказать, что если матрицы A и B удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.

3) Пусть A и B — матрицы порядка n. Доказать, что если $\operatorname{tr} A^m = \operatorname{tr} B^m$ для всех $m = 1, \ldots, n$, то характеристические многочлены матриц A и B равны.

4) а) Пусть A и B — любые матрицы порядка n. Доказать, что характеристические многочлены матриц AB и BA равны.

   б) Доказать, что для любых $n \times n$ матриц A и B, хотя бы одна из которых невырождена, матрица AB подобна матрице BA.

   в) Всегда ли это верно для вырожденных матриц?

5) Доказать, что сумма двух перестановочных полупростых операторов является полупростым оператором.

6) а) Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ может быть единственным образом представлен в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_n$.

   б) Доказать, что $\mathcal{A}_s$ и $\mathcal{A}_n$ можно выразить как многочлены от $\mathcal{A}$ без свободного члена.

7) Доказать, что если для операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в конечномерном комплексном линейном пространстве V выполнены равенства $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, то в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

8) *Дискриминантом* называется симметрический многочлен $D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$.

   Доказать, что $D(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} n & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$, где s_k — k-я степенная сумма.

9) Найти сумму квадратов и обратных величин к корням многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$.