Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 8.

1) Найти инвариантные множители группы $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{20}$.

2) Доказать, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на ее характеристический многочлен.

3) Пусть у обратимой матрицы A минимальный многочлен $p(\lambda)$ равен характеристическому. Чему равен минимальный многочлен матрицы A^{-1}?

4) Пусть минимальный многочлен матрицы A равен $\prod(x-\lambda_i)^{k_i}$. Чему равен минимальный многочлен блочной матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & E \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$?

5) Пусть число различных собственных значений матрицы A равно m. Положим $b_{ij} = \operatorname{tr} A^{i+j}$ и обозначим через d_k определитель матрицы $(b_{ij})_{0 \leqslant i,j < k}$. Доказать, что $d_m \neq 0$ и $d_{m+1} = 0$.

6) Найти условия, при которых вещественная матрица A, имеющая на побочной диагонали числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а на остальных местах нули, диагонализуема

   а) над полем вещественных чисел;

   б) над полем комплексных чисел?

7) Доказать, что если степень минимального многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства, то всякий оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, равен некоторому многочлену от $\mathcal{A}$.

8) Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле. Две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\Bbbk$ называются подобными, если $B = K^{-1}AK$ для некоторой обратимой $n \times n$ матрицы K с коэффициентами из $\Bbbk$. Две $n \times n$ матрицы F и G с коэффициентами из $\Bbbk[x]$ называются эквивалентными, если $G = CFD$ для некоторых $n \times n$ матриц C и D с коэффициентами из $\Bbbk[x]$ и определителем в $\Bbbk^*$. Доказать, что две $n \times n$ матрицы A и B с коэффициентами из $\Bbbk$ подобны в том и только в том случае, если их характеристические матрицы $F = xE - A$ и $G = xE - B$ эквивалентны. Как найти матрицу K, осуществляющую подобие A и B, если известны матрицы C и D, осуществляющие эквивалентность F и G?

9) Подмодуль $V \subseteq \mathbb{Z}^3$ порожден столбцами матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

   а) Разложить фактормодуль $\mathbb{Z}^3/V$ в сумму циклических $\mathbb{Z}$-модулей.

   б) Совпадают ли образы в $\mathbb{Z}^3/V$ у столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$?