Задачи по алгебре. I курс, весна 1999 года.
Листок № 9.

1) Докажите, что тензорное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

2) Пусть векторы $v_1, \ldots, v_d$ линейно независимы в пространстве V, а W — любое ненулевое пространство. Докажите, что каждое из подпространств $\langle v_i \rangle \otimes W \subset V \otimes W$ изоморфно W, а их сумма является прямой (через $\langle v_i \rangle$ обозначено одномерное подпространство в V, порождённое вектором v_i).

3) Пусть v_1, v_2 и v_3 — линейно независимые векторы пространства V. Докажите, что тензор $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3$ неразложим.

4) а) Пусть $\dim V = k$, $\dim W = n$, A — оператор в пространстве V, B — оператор в пространстве W. Выразить ранг, собственные значения, след и определитель оператора $A \otimes B$ через, соответственно, ранги, собственные значения, следы и определители операторов A и B.

   б) Пусть A и B — нильпотентные операторы, причем $\operatorname{rk} A = k - 1$ и $\operatorname{rk} B = n - 1$. Какова жорданова нормальная форма оператора $A \otimes B$?

5) Пусть $\dim V = k$, $\dim W = n$. Сколько орбит у действия группы $GL(V) \times GL(W)$ на пространстве $V \otimes W$?

6) Пусть $t \in V \otimes W$, $\dim V = k$, $\dim W = n$. Какова может быть размерность линейной оболочки тензоров вида $E \otimes A(t)$, где E — единичный оператор в пространстве V, а A пробегает пространство всех линейных операторов в пространстве W?

7) Пусть (e_i) — базис n-мерного пространства V, а (e^i) — сопряженный базис пространства V^*. Доказать, что тензор $\sum_{i=1}^n e_i \otimes e^i \in V \otimes V^*$ не зависит от выбора базиса (e_i).

8) Пусть линейные операторы A и B при отождествлении $\mathrm{Hom}(V,V)$ с $V^* \otimes V$ записываются, соответственно, тензорами $\sum_i \varphi_i \otimes u_i$ и $\sum_j \psi_j \otimes v_j$. Доказать, что их композицию AB можно записать в виде $\sum_j \psi_j \otimes w_j$ и в виде $\sum_i \eta_i \otimes u_i$. Как выражаются w_j и η_i через φ_i, ψ_j, u_i и v_j?

9) Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ отвечает изоморфизм $\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^*$, получающийся композицией изоморфизмов $\mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V \xrightarrow{\sim} (V^* \otimes V)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)^*$? Является ли эта форма симметрической? Как она вычисляется в терминах матриц?

10) Обозначим канонический изоморфизм $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,W)$ через f. Доказать, что ранг линейного отображения вида $f(\sum_{i=1}^k \varphi_i \otimes w_i)$ не превосходит k.