Независимый Московский Университет

Алгебра – I

Первый курс, весенний семестр 1998/99 г.
Лекции 9–11

Категории и функторы

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathcal{A}$, если заданы

1) Класс *объектов* $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

2) Множество *морфизмов* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ для каждой пары (A,B) объектов из $\mathcal{A}$; вместо $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ обычно пишут $u : A \to B$ или $A \xrightarrow{u} B$.

3) Отображение *композиции* морфизмов

$$\mu : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,C)$$

для каждой тройки (A,B,C) объектов из $\mathcal{A}$; композиция $\mu(u,v)$ морфизмов $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ и $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C)$ обычно обозначается $v \circ u$ или просто vu.

При этом требуется выполнение следующих аксиом:

(I) Композиция морфизмов ассоциативна: для каждой тройки морфизмов $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$ выполнено равенство $w(vu) = (wv)u$.

(II) Для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}_{\mathcal{A}}$ существует морфизм $1_A : A \to A$, называемый *тождественным морфизмом* или *единицей* объекта A, такой, что $1_A u = u$ и $v 1_A = v$ для любых морфизмов $B \xrightarrow{u} A$ и $A \xrightarrow{v} C$.

(III) Если пары (A,B) и (A',B') различны, то пересечение множеств $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A',B')$ пусто.

Любой морфизм $A \to A$ называется *эндоморфизмом* объекта A. Морфизм $\varphi : A \to B$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $\psi : B \to A$, что $\psi\varphi = 1_A$ и $\varphi\psi = 1_B$.

Пример 1. Категория *Sets* множеств, объектами которой являются все множества, морфизмами — отображения множеств, а композиция морфизмов — это композиция отображений.

Пример 2. Категория $\mathit{Vect}_{\Bbbk}$ конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, морфизмами в которой являются линейные отображения.

Пример 3. Категория $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \bullet)$, где V — фиксированное конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$. Объектами этой категории являются линейные отображения $\varphi : V \to W$, где W — любой объект категории *Vect*, а морфизмом объекта $\varphi : V \to W$ в объект $\psi : V \to U$ называется любое линейное отображение $\tau : W \to U$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ W \arrow[r, "\tau"] & U \end{tikzcd}$$

коммутативной.

Определение 2. Для каждой категории $\mathcal{A}$ следующим образом определяется *дуальная категория* $\mathcal{A}^\circ$:

А) Объекты категории $\mathcal{A}^\circ$ — те же, что у категории $\mathcal{A}$, т. е. $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$.

Б) По определению полагаем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$.

В) Композиция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(A, C)$$

определяется так: если

$$u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(A, B) \qquad \text{и} \qquad v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(B, C),$$

то

$$v \underset{\mathcal{A}^\circ}{\circ} u = u \underset{\mathcal{A}}{\circ} v.$$

Определение 3. Пусть даны категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. *Ковариантный* (соответственно *контравариантный*) *функтор* F из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{C}$ состоит из:

а) отображения $A \mapsto FA$, сопоставляющего каждому объекту A из категории $\mathcal{A}$ объект FA из категории $\mathcal{C}$;

б) отображений $F(A, B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA, FB)$ (соответственно $F(A, B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FB, FA)$), определенных для всех пар (A, B) объектов из $\mathcal{A}$. Образ морфизма $u : A \to B$ при отображении $F(A, B)$ мы будем обозначать просто через Fu.

При этом требуется выполнение следующих свойств:

(i) $F1_A = 1_{FA}$ для любого объекта A из категории $\mathcal{A}$;

(ii) $F(v\circ u)=Fv\circ Fu$ (соответственно $F(v\circ u)=Fu\circ Fv$) для любых двух морфизмов u и v, композиция $v\circ u$ которых определена.

Ясно, что контравариантный функтор $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ — это, по существу, то же самое, что ковариантный функтор $\mathcal{A}^\circ\to\mathcal{C}$.

Пример 4. Для любого вещественного векторного пространства V его *комплексификация* $V^{\mathbb{C}}$ определяется как множество пар (u,v), где $u,v\in V$. В $V^{\mathbb{C}}$ вводится структура комплексного векторного пространства следующим образом: сложение покомпонентное, а умножение на комплексное число $z=x+iy$ задается формулой $z(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$.

Для любого $\mathbb{R}$-линейного отображения вещественных векторных пространств $f:V\to W$ его комплексификация определяется так: $f^{\mathbb{C}}(u,v)=(fu,fv)$. Ясно, что $f^{\mathbb{C}}$ является $\mathbb{C}$-линейным отображением. Проверьте самостоятельно, что комплексификация является ковариантным функтором из категории $Vect_{\mathbb{R}}$ в категорию $Vect_{\mathbb{C}}$.

Пример 5. Для любого комплексного векторного пространства V его *овеществление* $V_{\mathbb{R}}$ определяется как то же самое множество V со структурой вещественного векторного пространства (сложение векторов и их умножение на вещественные числа уже определено в силу включения $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$).

Для любого $\mathbb{C}$-линейного отображения комплексных векторных пространств $f:V\to W$ его овеществлением является то же самое отображение (ясно, что оно является $\mathbb{R}$-линейным). Проверьте, что овеществление является ковариантным функтором из категории $Vect_{\mathbb{C}}$ в категорию $Vect_{\mathbb{R}}$.

Упражнение 1. Для любого векторного пространства V над полем $\Bbbk$ определено сопряженное пространство V^*, причем для любого $\Bbbk$-линейного отображения векторных пространств $f:V\to W$ имеется сопряженное отображение $f^*:W^*\to V^*$. Проверьте, что сопряжение является контравариантным функтором из категории $Vect_{\Bbbk}$ в категорию $Vect_{\Bbbk}$.

Определение 4. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}$ — категории. Их *прямым произведением* $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ называется категория, объектами которой являются всевозможные пары (A,B), где $A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$, $B\in\operatorname{Ob}\mathcal{B}$, а $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A,B),(A'B'))=\operatorname{Hom}(A,A')\times\operatorname{Hom}(B,B')$. При этом композиция морфизмов определяется покомпонентно.

Аналогично определяется прямое произведение любого семейства категорий.

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{A}=Vect_{\Bbbk}$ — категория конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$. Проверьте, что отображение $(V,W)\mapsto\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$, определенное на объектах категории $\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{A}$, естественно продолжается до ковариантного функтора $\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$. Иначе говоря, $\operatorname{Hom}_{\Bbbk}(\ ,\ )$ — *функтор от двух аргументов, контравариантный по первому и ковариантный по второму.*

Определение 5. Пусть F и G — два ковариантных функтора из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{C}$. *Функторным морфизмом* $f : F \to G$ называется совокупность морфизмов $f_A : FA \to GA$ для всех $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, таких, что для любого морфизма $u : A \to B$ из категории $\mathcal{A}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "Fu"'] & GA \arrow[d, "Gu"] \\ FB \arrow[r, "f_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если функторы F и G контравариантны, то направление вертикальных стрелок на диаграмме меняется на противоположное.

Функторный морфизм называется *функторным изоморфизмом*, если f_A является изоморфизмом для любого объекта A из категории $\mathcal{A}$.

Упражнение 3. Докажите, что функтор из категории конечномерных векторных пространств в себя, переводящий каждое пространство в дважды двойственное к нему, изоморфен тождественному функтору.

Определение 6. Пусть $\mathcal{A}$ — категория. Объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ называется *инициальным*, или *универсальным отталкивающим*, если для любого объекта $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ состоит из одного элемента. Объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ называется *финальным*, или *универсальным притягивающим*, если для любого объекта $B \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$ состоит из одного элемента.

Пример 6. В категории множеств инициальным объектом является пустое множество, а финальным объектом — любое одноэлементное множество.

Упражнение 4. Пусть M и N — фиксированные множества. Обозначим через $\mathcal{A}$ категорию, объектами которой являются пары отображений $\varphi : M \to S$ и $\psi : N \to S$, где S — любое множество. Морфизмом пары (φ, ψ) в пару (φ', ψ') является любое отображение $\tau : S \to S'$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi'"] \\ S \arrow[r, "\tau"] & S' \\ N \arrow[r, equal] \arrow[u, "\psi"] & N \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной. Аналогично определяется категория $\mathcal{B}$, объектами которой являются пары отображений $\xi : T \to M$ и $\eta : T \to N$, где T — любое множество. Докажите, что в категории $\mathcal{A}$ есть инициальный объект — дизъюнктное объединение $M \sqcup N$ множеств M и N с отображениями вложения множеств M и N в $M \sqcup N$, а в категории $\mathcal{B}$ есть финальный объект — декартово произведение $M \times N$ множеств M и N с отображениями проекции $M \times N$ на M и N.

Утверждение 1. *Если в категории существует инициальный объект, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма. Аналогично, если в категории существует финальный объект, то он определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма.*

Доказательство. Пусть A и B — два инициальных объекта. Поскольку A — инициальный, существует единственный морфизм $\varphi : A \to B$, а поскольку B — инициальный, существует единственный морфизм $\psi : B \to A$. В силу инициальности объектов A и B, у них нет эндоморфизмов, кроме тождественного. Поэтому $\psi\varphi = 1_A$ и $\varphi\psi = 1_B$, то есть φ и ψ — изоморфизмы.

Для финальных объектов доказательство аналогично. □

Тензорное произведение

Пусть $V_1, \ldots, V_p, U$ — векторные пространства над полем $\Bbbk$. Отображение

$$\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to U$$

называется *полилинейным* (или p-*линейным*), если оно линейно по каждому из p аргументов (при фиксированных значениях остальных аргументов). Такие отображения образуют векторное пространство — действительно, очевидно, что линейная комбинация полилинейных отображений вновь является полилинейным отображением. Обозначим это векторное пространство через $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots, V_p; U)$.

Рассмотрим случай билинейных отображений $V \times W \to U$. Обобщение на случай полилинейных отображений не составит труда.

Фиксируем векторные пространства V и W. Рассмотрим категорию, объектами которой являются билинейные отображения из $V \times W$ в произвольное векторное пространство, а морфизмом билинейного отображения $\varkappa : V \times W \to U$ в билинейное отображение $\varkappa' : V \times W \to U'$ является любое линейное отображение $\tau : U \to U'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varkappa"'] & V \times W \arrow[d, "\varkappa'"] \\ U \arrow[r, "\tau"] & U' \end{tikzcd}$$

Универсальный отталкивающий объект в этой категории (универсальное билинейное отображение) называется тензорным произведением пространств V и W. Более точно, тензорным произведением пространств V и W называется векторное пространство, в котором принимает значения универсальное билинейное отображение. Такое пространство обозначается через $V \otimes W$, а универсальное билинейное отображение называется тензорным умножением и обозначается символом $\otimes$ (то есть образ пары (v, w) при универсальном билинейном отображении обозначается как $v \otimes w$ и называется тензорным произведением этих векторов).

Поскольку инициальный объект любой категории (если он существует) определен однозначно с точностью до единственного изоморфизма, то тензорное произведение двух пространств (если оно существует) определено однозначно с точностью до единственного изоморфизма. Осталось доказать существование тензорного произведения.

Мы начнем с конструкции, применимой и в более общей ситуации тензорного произведения модулей над кольцом (хотя это нам пока и не понадобится).

Для любых двух векторных пространств V и W рассмотрим пространство L всех *формальных* линейных комбинаций элементов прямого произведения $V \times W$ (то есть пространство, базисом которого является множество $V \times W$). В L рассмотрим подпространство L_0, являющееся линейной оболочкой элементов вида

1) $\alpha(v, w) - (\alpha v, w)$;

2) $\alpha(v, w) - (v, \alpha w)$;

3) $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$;

4) $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$.

Рассмотрим отображение $V \times W \to L/L_0$, переводящее каждую пару $(v, w) \in V \times W$ в класс этой пары по модулю L_0.

Упражнение 5. Докажите, что это отображение является универсальным билинейным отображением.

Таким образом, мы можем положить $V \otimes W = L/L_0$ и обозначить через $v \otimes w$ (для любых $v \in V$, $w \in W$) образ пары (v, w) при описанном выше отображении.

Вышеизложенная конструкция, несмотря на свою общность и универсальность, не очень наглядна. Поэтому полезно иметь в виду и другие варианты конструкции тензорного произведения векторных пространств.

Пусть в пространствах V и W выбраны базисы (v_i) и (w_j) соответственно. Рассмотрим произвольное полилинейное отображение $\varphi : V \times W \to U$. Тогда для любых $v = \sum x^i v_i \in V$ и $w = \sum y^j w_j \in W$ мы получаем

$$\varphi(v, w) = \sum_{i,j} x^i y^j \varphi(v_i, w_j). \tag{1}$$

Таким образом, билинейное отображение полностью определяется своими значениями на базисных векторах, причем эти значения могут быть любыми, так как равенство (1) определяет билинейное отображение φ при любом выборе векторов $\varphi(v_i, w_j) \in U$.

Рассмотрим теперь новое векторное пространство с базисом, состоящем из символов $v_i \otimes w_j$, где v_i пробегает базис пространства V, а w_j пробегает базис пространства W. Обозначим это пространство через $V \otimes W$ и назовем *тензорным произведением* пространств V и W.

Определим билинейное отображение $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ формулой

$$\Big(\sum x^i v_i, \sum y^j w_j\Big) \mapsto \sum_{i,j} x^i y^j v_i \otimes w_j.$$

Для любого билинейного отображения $\varphi : V \times W \to U$ определим *линейное* отображение $\tilde{\varphi} : V \otimes W \to U$ формулой

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{i,j} t^{ij} v_i \otimes w_j\Big) = \sum_{i,j} t^{ij} \varphi(v_i, w_j). \tag{2}$$

Ясно, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \otimes$ и отображение $\tilde{}\ : \mathrm{Hom}(V, W; U) \to \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ является изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что билинейное отображение $\otimes : V \times W \to V \otimes W$ является универсальным.

Замечание 1. Всё вышесказанное буквально переносится на полилинейные отображения. Таким образом легко сформулировать определение тензорного произведения нескольких пространств как в терминах базисов, так и в терминах универсального полилинейного отображения. (Сделайте это!)

Функториальность и канонические изоморфизмы

Утверждение 2. *Отображение $(V, W) \mapsto V \otimes W$ продолжается до ковариантного функтора $Vect_{\Bbbk} \times Vect_{\Bbbk} \to Vect_{\Bbbk}$.*

Доказательство. Нам надо доказать, что можно определить для любых линейных отображений $f : V_1 \to V_2$ и $g : W_1 \to W_2$ линейное отображение $f \otimes g : V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$ так, чтобы $1_V \otimes 1_W = 1_{V \otimes W}$ для любых векторных пространств V и W, и чтобы тензорное произведение композиций линейных отображений $f = f_1 \circ f_2$ и $g = g_1 \circ g_2$ всегда равнялось композиции тензорных произведений: $f \otimes g = (f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2)$.

Итак, пусть $f : V_1 \to V_2$ и $g : W_1 \to W_2$ — линейные отображения. Рассмотрим отображение $\otimes \circ (f \times g) : V_1 \times W_1 \to V_2 \otimes W_2$ (переводящее (v, w) в $f(v) \otimes g(w)$). По универсальности тензорного произведения существует единственное линейное отображение $V_1 \otimes W_1 \to V_2 \otimes W_2$, которое мы обозначим через $f \otimes g$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} V_1 \times W_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\otimes"'] & V_1 \times W_1 \arrow[d, "\otimes \circ f \times g"] \\ V_1 \otimes W_1 \arrow[r, "f \otimes g"'] & V_2 \otimes W_2 \end{tikzcd}$$

коммутативной. То, что $1_V \otimes 1_W = 1_{V \otimes W}$ для любых векторных пространств V и W, и что тензорное произведение композиций линейных отображений равняется композиции тензорных произведений, тоже автоматически следует из универсальности (проверьте это). □

Аналогичным образом, операция взятия тензорного произведения k пространств продолжается до ковариантного функтора от k аргументов.

Функторы можно подставять один в другой, то есть брать композицию функторов. Например, можно рассмотреть функтор $(V, W) \mapsto V^* \otimes W$, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму, или ковариантный функтор $(U, V, W) \mapsto (U \oplus V) \otimes W$, или функтор $(U, V, W) \mapsto \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$ (кстати, по каким аргументам он ковариантен, а по каким — контравариантен?)

Некоторые из функторов, построенных таким образом из функторов *, Hom, $\oplus$ и $\otimes$, оказываются изоморфными. Такую ситуацию часто описывают словами «канонический изоморфизм». Вот несколько примеров:

Утверждение 3. *Имеют место канонические изоморфизмы:*

1) $U \otimes V \otimes W \xrightarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W$;
2) $V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$;
3) $(U \oplus V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes W \oplus V \otimes W$;
4) $V^* \otimes W^* \xrightarrow{\sim} (V \otimes W)^*$;
5) $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$;
6) $\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$.

Доказательство. Построим изоморфизм $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$. Рассмотрим отображение $V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, переводящее пару (ξ, w) в линейное отображение $\xi(\bullet)w$ (переводящее каждый элемент $v \in V$ в $\xi(v)w$). Ясно, что это отображение билинейно, поэтому оно поднимается до линейного отображения $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$. Ядро такого линейного отображения, очевидно, нулевое. Из совпадения размерностей теперь следует, что это изоморфизм. То, что набор изоморфизмов $V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)$ для всех V и W составляет изоморфизм функторов, проверьте сами.

Остальные канонические изоморфизмы доказываются примерно из тех же соображений. □

Следующее упражнение дает, по существу, еще один вариант конструкции тензорного произведения k пространств.

Упражнение 6. Докажите, что отображение $\mathrm{Ob}\, Vect_{\Bbbk}^{k} \to \mathrm{Ob}\, Vect_{\Bbbk}$, переводящее $(V_1, \dots, V_k)$ в $\mathrm{Hom}(V_1^*, \dots, V_k^*; \Bbbk)$, продолжается до функтора, изоморфного тензорному произведению. Как записывается универсальное k-линейное отображение $V_1 \times \dots \times V_k \to \mathrm{Hom}(V_1^*, \dots, V_k^*; \Bbbk)$?

Координатная запись тензоров

Вспомним, что арифметическое линейное пространство $\Bbbk^n$ — это пространство последовательностей $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (координат в стандартном базисе (e_i)). Тензорное произведение арифметических линейных пространств $\Bbbk^n$ и $\Bbbk^m$ — это пространство двухиндексных наборов $(t^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ (координат в базисе $(e_i \otimes e_j)$). Алгебра линейных операторов в пространстве $\Bbbk^n$ естественно отождествляется с алгеброй матриц $M_n(\Bbbk)$. Аналогично, алгебра линейных операторов в пространстве $\Bbbk^n \otimes \Bbbk^m$ — это алгебра «матриц», строки и столбцы которых занумерованы парами индексов (i, j), где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$, то есть четырехиндексных наборов с двумя верхними (первыми) и двумя нижними (вторыми) индексами.

Упражнение 7. Доказать, что тензорное произведение матриц $A = (a_k^i)$ и $B = (b_l^j)$ (то есть тензорное произведение отображений) имеет координаты $c_{kl}^{ij} = a_k^i b_l^j$.

Выбрать базис (v_i) в n-мерном пространстве V — по сути то же самое, что задать изоморфизм $\varphi : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ такой, что $v_i = \varphi(e_i)$. Выбор базисов в n-мерном пространстве V и m-мерном пространстве W позволяет отождествить пространство $V \otimes W$ с пространством двухиндексных наборов $(t^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ (тензорное произведение изоморфизмов $\varphi : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ и $\psi : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$ — изоморфизм $\varphi \otimes \psi : \Bbbk^n \otimes \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} V \otimes W$).

Матрица A перехода от базиса (v_i) к базису $(\tilde{v}_i)$, отвечающему изоморфизму $\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$, — это матрица линейного отображения $\varphi^{-1}\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ (линейные отображения $\Bbbk^n \to \Bbbk^n$ находятся в естественной биекции с матрицами $n \times n$). Пусть $A = (a_k^i)$ — матрица перехода от базиса (v_i) к базису $(\tilde{v}_i)$ в пространстве V, а $B = (b_l^j)$ — матрица перехода от базиса (w_j) в пространстве W, отвечающего изоморфизму $\psi : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$, к базису $(\tilde{w}_j)$, отвечающему изоморфизму $\tilde{\psi} : \Bbbk^m \xrightarrow{\sim} W$. Тогда координаты (t^{ij}) тензора t в базисе $(v_i \otimes w_j)$ выражаются через его координаты $(\tilde{t}^{ij})$ в базисе $(\tilde{v}_i \otimes \tilde{w}_j)$ по формуле

$$t^{ij} = \sum_{k,l} a_k^i b_l^j \tilde{t}^{kl}. \tag{3}$$

Другими словами, к координатам тензора применяется тензорное произведение отображений $\varphi^{-1}\tilde{\varphi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $\psi^{-1}\tilde{\psi} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$.

Таким образом, пространство $W \times V$ можно описать так: тензор (элемент $W \times V$) задаётся для каждого выбора базисов в пространствах V и W набором своих координат (t^{ij}) (то есть соответствующим элементом тензорного произведения арифметических линейных пространств), причем при замене базисов координаты тензора преобразуются по формуле (3).

Если пространства V и W связаны друг с другом, например $W = V$ или $W = V^*$, то естественно рассматривать лишь согласованные замены базисов. Так, если $A = (a^i_j)$ — матрица замены базиса в пространстве V, то есть $\tilde{v}_j = \sum_i a^i_j v_i$. Тогда для сопряженных базисов в пространстве V^* имеет место формула замены $\tilde{v}^i = \sum_j b^i_j v^j$, где $B = (b^i_j) = A^{-1}$. Соответственно элемент тензорного произведения

$$V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}$$

для каждого выбора базиса пространства V задается набором координат $(t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q})$, причем при замене базиса координаты преобразуются так:

$$t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{k_1, \ldots, k_p l_1, \ldots, l_q} a^{i_1}_{k_1} \ldots a^{i_p}_{k_p} b^{l_1}_{j_1} \ldots b^{l_q}_{j_q} \tilde{t}^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}.$$

Расширение поля скаляров

Пусть $\Bbbk$ — подполе поля $\mathbb{F}$, а V — векторное пространство над полем $\Bbbk$. Поле $\mathbb{F}$ тоже имеет естественную структуру векторного пространства над полем $\Bbbk$. Рассмотрим тензорное произведение этих векторных пространств: $\mathbb{F} \otimes V$. Каждый элемент $\lambda \in \mathbb{F}$ действует в $\mathbb{F} \otimes V$ посредством $\Bbbk$-линейного оператора $\lambda \otimes 1$ (тензорное произведение умножения на λ в $\mathbb{F}$ и единичного оператора в V). Легко проверить, что таким образом $\mathbb{F} \otimes V$ приобретает структуру векторного пространства над полем $\mathbb{F}$. Если $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис пространства V, то $(1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n)$ — базис пространства $\mathbb{F} \otimes V$.

Упражнение 8. Доказать, что если V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, то комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ естественно изоморфно комплексификации пространства V.

Из функториальности тензорного произведения следует, что тензорное умножение на поле $\mathbb{F}$ представляет собой функтор из категории $Vect_{\Bbbk}$ в категорию $Vect_{\mathbb{F}}$. Отметим, что если оператор $f : V \to V$ записывается в базисе (v_i) матрицей A, то соответствующий оператор $1 \otimes f : \mathbb{F} \otimes V \to \mathbb{F} \otimes V$ записывается в базисе $(1 \otimes v_i)$ той же матрицей.

Упражнение 9. Построить канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes V,\mathbb{F}\otimes W)\cong\mathbb{F}\otimes\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W),$$

$$(\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}V)\otimes_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}W)\cong\mathbb{F}\otimes_{\Bbbk}(V\otimes_{\Bbbk}W),$$

где через $\otimes_{\Bbbk}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\otimes_{\mathbb{F}}$ обозначается тензорное произведение векторных пространств над $\mathbb{F}$.

Поскольку каждое поле можно вложить в алгебраически замкнутое, то таким образом можно сводить многие задачи о тензорных произведениях операторов и т. п. к случаю алгебраически замкнутого поля (и пользоваться, например, существованием жордановой нормальной формы).

Алгебры

Определение 7. *Алгеброй над полем* $\Bbbk$ называется кольцо A, являющееся одновременно линейным пространством над полем $\Bbbk$, в котором кольцевые операции согласованы со структурой линейного пространства, то есть сложение – общее и $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$ для любых $a,b\in A$ и $\alpha\in\Bbbk$.

Пример 7. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгеброй размерности два над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Любое поле характеристики p является алгеброй над полем $\mathbb{F}_p$. Кольцо многочленов $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ является бесконечномерной алгеброй над полем $\Bbbk$. Кольцо $n\times n$ матриц над полем $\Bbbk$ является алгеброй размерности n^2 над полем $\Bbbk$.

Пусть $(a_1,\ldots,a_n)$ — базис алгебры A над полем $\Bbbk$ как линейного пространства. Из определения ясно, что структура алгебры однозначно определяется произведениями базисных элементов a_ia_j для всех $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Поскольку $(a_1,\ldots,a_n)$ — базис, эти произведения можно по нему разложить:

$$a_ia_j=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}a_k.$$

Элементы $c_{ij}^k\in\Bbbk$ называются *структурными константами* алгебры A. Отметим, что произвольный выбор структурных констант определяет на линейном пространстве A структуру алгебры, которая, вообще говоря, не будет ни коммутативной, ни ассоциативной.

Умножение в алгебре — это билинейное отображение $A\times A\to A$ или, эквивалентно, линейное отображение $A\otimes A\to A$. Пользуясь каноническим изоморфизмом $\mathrm{Hom}(A\otimes A,A)\xrightarrow{\sim}A^*\otimes A^*\otimes A$, мы получаем, что структура алгебры на пространстве A задается элементом тензорного произведения $A^*\otimes A^*\otimes A$ (этот элемент называется *структурным тензором*; легко видеть, что структурные константы — это координаты структурного тензора).

Упражнение 10. При каком условии на структурные константы c_{ij}^k алгебра A является коммутативной? Ассоциативной?

Пример 8. Определим алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ как линейное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $(1, i, j, k)$, где произведения базисных векторов определяются так:

$$\begin{aligned}
1\cdot 1 = -i\cdot i = -j\cdot j = -k\cdot k &= 1;\\
1\cdot i = i\cdot 1 = j\cdot k = -k\cdot j &= i;\\
1\cdot j = j\cdot 1 = k\cdot i = -i\cdot k &= j;\\
1\cdot k = k\cdot 1 = i\cdot j = -j\cdot i &= k.
\end{aligned}$$

Алгебра $\mathbb{H}$, очевидно, не является коммутативной. Однако она ассоциативна. Очевидно (см. упражнение 10), что достаточно проверить ассоциативность произведения базисных элементов, что не сложно.

Определение 8. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *телом*, если каждый ненулевой элемент $a \in R$ обратим.

Утверждение 4. *Алгебра $\mathbb{H}$ является телом.*

Доказательство. Пусть $h = a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$. Положим $\overline{h} = a-bi-cj-dk \in \mathbb{H}$. Тогда $h\overline{h} = \overline{h}h = a^2+b^2+c^2+d^2$ и если $h \neq 0$, то $\overline{h}/(a^2+b^2+c^2+d^2)$ является обратным к h. □

Пусть $\mathbb{k}$ — подполе поля $\mathbb{F}$, и A — алгебра над полем $\mathbb{k}$. Тогда имеет естественную структуру алгебры над $\mathbb{F}$. Действительно, в силу канонических изоморфизмов

$$(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{k}} A)\otimes_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{k}} A) \cong \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{k}}(A\otimes_{\mathbb{k}} A)$$

и

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{k}}(A\otimes_{\mathbb{k}} A), \mathbb{F}\otimes A) \cong \mathbb{F}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(A\otimes_{\mathbb{k}} A, A)$$

нужная структура получается тензорным умножением структурного гомоморфизма алгебры A на $1\in\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{k}} A$ может быть описана как алгебра над $\mathbb{F}$ со структурными константами алгебры A.

Алгебра Грассмана

Алгебра Грассмана от n переменных над полем $\mathbb{k}$, построение которой будет изложено далее, является ассоциативной алгеброй с единицей. Она почти столь же важна в математике, как и кольцо многочленов от нескольких переменных, и во многом аналогична ему. Кольцо многочленов $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]$

порождено набором коммутирующих переменных $(x_1, \dots, x_n)$, между которыми нет других соотношений. Алгебра Грассмана $\Lambda^\bullet(\xi^1, \dots, \xi^n)$ порождена набором *антикоммутирующих* переменных $\xi^1, \dots, \xi^n$, между которыми также нет других соотношений.

Слово «антикоммутирующие» означает следующее: $\xi^i \wedge \xi^j = -\xi^j \wedge \xi^i$ для любых $i, j \in [1, n]$, а также $\xi^i \wedge \xi^i = 0$ для любого $i \in [1, n]$ (где $[1, n]$ обозначает множество целых чисел от 1 до n). При $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$ второе условие следует из первого. Знак $\wedge$ в алгебре Грассмана традиционно используется для обозначения произведения. Умножение в алгебре Грассмана называется *внешним умножением*.

Условие антикоммутативности умножения на первый взгляд сильно отличается от коммутативности, но на самом деле ничем не хуже — оно позволяет переставлять в любом произведении $\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k}$ соседние сомножители местами, при этом произведение просто меняет знак. Отсюда следует, что в алгебре Грассмана любое произведение образующих либо равно нулю, либо равно, с точностью до знака, произведению образующих со строго возрастающими номерами. Поэтому каждый элемент алгебры Грассмана линейно выражается через такие произведения.

Все вышесказанное представляет собой только наводящие соображения — алгебру Грассмана еще предстоит построить. Дадим точные определения.

Зафиксируем набор *грассмановых переменных* $\xi^1, \dots, \xi^n$. *Грассмановым мономом* от $\xi^1, \dots, \xi^n$ называется выражение вида $\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$. Обозначим такой моном через ξ^I, где $I = \{i^1, \dots, i^k\}$. Таким образом, грассмановы мономы находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами множества $\{1, \dots, n\}$. Пустому множеству при этом соответствует произведение пустого множества образующих, то есть 1.

Положим $\xi^{i_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \xi^{i_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma) \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k}$ для любой перестановки $\sigma \in S_k$ (напомню, что через $\varepsilon(\sigma)$ обозначается знак перестановки σ). Произведение $\xi^{j_1} \wedge \dots \wedge \xi^{j_m}$, где среди набора индексов $(j_1, \dots, j_m)$ есть повторяющиеся, положим равным нулю.

Теперь легко определить произведение $\xi^I \wedge \xi^J$ грассмановых мономов ξ^I и ξ^J. Оно получается просто приписыванием одного монома к другому через знак $\wedge$ и преобразованием получившегося выражения по изложенным выше правилам. Результат можно описать так:

$$\xi^I \wedge \xi^J = \begin{cases} 0, & \text{если } I \cap J \neq \varnothing, \\ (-1)^{c(I,J)} \xi^{I \cup J}, & \text{если } I \cap J = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$c(I, J) = \#\{(i, j) \in I \times J \mid i > j\}.$$

(Знак $\#$ обозначает число элементов множества.)

Упражнение 11. Доказать, что введенное умножение мономов является ассоциативным.

Обозначим через $\Lambda^\bullet(\xi^1,\ldots,\xi^n)$, или просто через $\Lambda^\bullet$, линейное пространство над полем $\Bbbk$ с базисом (ξ^I), то есть пространство всех выражений вида

$$\sum_{I\subseteq[1,n]} a_I\xi^I,$$

где $a_I\in\Bbbk$. Введенное на базисе этого пространства умножение задает структуру алгебры на $\Lambda^\bullet$. По построению это алгебра с единицей. Легко видеть, что ассоциативность умножения в алгебре достаточно проверять на базисе (см. упражнение 10). Из упражнения 11 получаем, что алгебра $\Lambda^\bullet$ является ассоциативной. Она и называется алгеброй Грассмана.

Размерность алгебры Грассмана равна числу всех подмножеств множества $[1,n]$, то есть $\dim\Lambda^\bullet = 2^n$. Назовем *степенью* монома $\xi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi^{i_k}$ число k. Грассмановы мономы степени k образуют базис подпространства $\Lambda^k\subseteq\Lambda^\bullet$. Ясно, что $\dim\Lambda^k=\binom{n}{k}$ и $\Lambda^\bullet=\bigoplus\limits_{k=0}^{n}\Lambda^k$. Отметим также, что при перемножении степени мономов складываются.

Пусть $\alpha,\beta\in\Lambda^1$, то есть $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\xi^i$ и $\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\xi^i$. Тогда, как легко убедиться, $\alpha\wedge\alpha=0$ и $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$. Эти равенства понадобятся нам на следующей лекции.

Упражнение 12. Доказать, что если $\zeta\in\Lambda^p$ и $\eta\in\Lambda^q$, то

$$\zeta\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\zeta.$$

Легко проверить

Утверждение 5. *Определитель* $\det A$ *матрицы* $A=(a^i_j)\in M_n(\Bbbk)$ *равен коэффициенту при* $\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^n$ *в произведении* n *грассмановых полиномов первой степени*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}a^1_j\xi^j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n}a^2_j\xi^j\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n}a^n_j\xi^j\Big)=(\det A)\xi^1\wedge\cdots\wedge\xi^n.$$

Более того, если перемножить $m<n$ грассмановых полиномов первой степени, то коэффициентами в разложении этого произведения по стандартному базису будут миноры порядка m соответствующей матрицы размера $m\times n$.

Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры

Для любого векторного пространства V положим

$$T(V)=\bigoplus_{r=0}^{\infty}V^{\otimes r}.$$

Мы считаем $V^{\otimes 0} = \Bbbk$; бесконечная прямая сумма — это пространство последовательностей, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля (то есть базис прямой суммы — это объединение базисов слагаемых).

Естественные билинейные отображения $V^{\otimes r_1} \times V^{\otimes r_2} \to V^{\otimes (r_1+r_2)}$ в сумме дают билинейное отображение $T(V) \times T(V) \to T(V)$, то есть задают на пространстве $T(V)$ структуру *алгебры над полем* $\Bbbk$. Эта алгебра называется *тензорной алгеброй пространства* V. Операция умножения в тензорной алгебре обозначается символом $\otimes$.

Пусть в пространстве V выбран базис (v_i). Базис тензорной алгебры составляют всевозможные тензорные произведения базисных векторов: $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$ (как всегда, произведением пустого множества сомножителей считается единица). Произведение базисных мономов, очевидно, является ассоциативным, так что $T(V)$ является ассоциативной алгеброй с единицей.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы произвольной ассоциативной алгебры A. Тогда отображение $\varphi : T(V) \to A$, заданное на базисе формулой $\varphi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, является, очевидно, гомоморфизмом алгебр, переводящим пространство V в линейную оболочку элементов $a_1, \ldots, a_n$. Поэтому тензорная алгебра $T(V)$ обладает следующим свойством универсальности: любое линейное отображение пространства V в любую ассоциативную алгебру A с единицей однозначно продолжается до гомоморфизма $T(V) \to A$, переводящего единицу алгебры $T(V)$ в единицу алгебры A. В частности, любая конечнопорожденная ассоциативная алгебра с единицей изоморфна фактор-алгебре тензорной алгебры конечномерного векторного пространства.

Обозначим через I двусторонний идеал алгебры $T(V)$, порожденный элементами вида $v \otimes w - w \otimes v$, где $v, w \in V$. Положим $S(V) = T(V)/I$. Эта алгебра называется *симметрической алгеброй пространства* V. Операция умножения в симметрической алгебре обозначается символом $\cdot$. Образ прямого слагаемого $V^{\otimes r}$ при проекции $T(V) \to S(V)$ обозначается через $S^r(V)$.

Ясно, что образы элементов пространства V в $S(V)$ коммутируют. Поскольку они порождают $S(V)$ как алгебру с единицей, то она является коммутативной алгеброй. Пусть K — коммутативная алгебра, а $\tau : V \to K$ — линейное отображение. По свойству универсальности тензорной алгебры τ продолжается до гомоморфизма $T(V)$ в K. Поскольку алгебра K коммутативна, то тензоры вида $v \otimes w - w \otimes v$ (а значит и порожденный ими идеал) лежат в ядре этого гомоморфизма, то есть он пропускается через симметрическую алгебру. Поэтому и симметрическая алгебра обладает свойством универсальности: любое линейное отображение пространства V в любую коммутативную ассоциативную алгебру K с единицей однозначно продолжается до гомоморфизма $S(V) \to K$, переводящего единицу алгебры $S(V)$ в единицу алгебры K. В частности, любая конечнопорожденная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей изоморфна факторалгебре симметрической алгебры конечномерного векторного пространства.

Пусть в пространстве V выбран базис $(v_1, \ldots, v_n)$. Рассмотрим кольцо многочленов $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$. В силу универсальности симметрической алгебры, существует гомоморфизм алгебр $S(V)\to\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$, при котором v_i переходит в x_i для всех i. Поскольку мономы $x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$ составляют базис алгебры многочленов, то мономы $v_1^{k_1}\ldots v_n^{k_n}$ линейно независимы в симметрической алгебре. В то же время, очевидно, что они линейно порождают $S(V)$. Поэтому они составляют базис $S(V)$ и эта алгебра изоморфна алгебре многочленов.

Упражнение 13. Найдите $\dim S^r(V)$, если $\dim V=n$.

Обозначим через J двусторонний идеал алгебры $T(V)$, порожденный элементами вида $v\otimes v$, где $v\in V$. Положим $\Lambda(V)=T(V)/J$. Эта алгебра называется *внешней алгеброй пространства* V. Операция умножения во внешней алгебре обозначается символом $\wedge$. Образ прямого слагаемого $V^{\otimes r}$ при проекции $T(V)\to\Lambda(V)$ обозначается через $\Lambda^r(V)$.

Упражнение 14. Докажите, что $\Lambda(V)$ является ассоциативной алгеброй с единицей. Сформулируйте и докажите для нее подходящее свойство универсальности.

Внешняя алгебра пространства V находится в таком же отношении к грассманновой алгебре с n образующими, как симметричесвая алгебра к кольцу многочленов от n переменных. Проведите соответствующее рассуждение самостоятельно.

Упражнение 15. Найдите $\dim\Lambda^r(V)$ и $\dim\Lambda(V)$, если $\dim V=n$.

Симметричные и кососимметричные тензоры

Отождествим пространство $V^{\otimes r}$ с пространством r-линейных функций на $(V^*)^r$. Обозначим через $ST^r(V)$ множество тензоров из $V^{\otimes r}$, отвечающих симметричным полилинейным функциям (то есть не меняющимся при перестановках аргументов), а через $\Lambda T^r(V)$ — множество элементов из $(V)^{\otimes r}$, отвечающих кососимметричным полилинейным функциям (то есть обращающимся в нуль всегда, когда среди аргументов есть одинаковые).

Утверждение 6. *Пространство $ST^r(V^*)$ канонически изоморфно пространству $S^r(V)^*$, а пространство $\Lambda T^r(V^*)$ канонически изоморфно пространству $\Lambda^r(V)^*$.*

Доказательство. Пространство $(V^*)^{\otimes r}$ канонически двойственно пространству $V^{\otimes r}$. Ядро I^r проекции $V^{\otimes r}\to S^r(V)$ — линейная оболочка тензоров вида $v_1\otimes\cdots\otimes(v_s\otimes v_{s+1}-v_{s+1}\otimes v_s)\otimes\cdots\otimes v_r$. Его аннулятор в $(V^*)^{\otimes r}$ — это множество r-линейных форм, не меняющихся при перестановке соседних аргументов, то есть не меняющихся ни при какой перестановке аргументов.

Таким образом, $S^r(V)^* = (V^{\otimes r}/I^r) \simeq (I^r)^\perp = ST^r(V^*)$. То, что этот изоморфизм является каноническим, ясно из его конструкции.

Аналогично получается соответствующий изоморфизм для кососимметрических тензоров. $\square$

Из изоморфизма внешней алгебры и алгебры Грассмана очевидно, что для n-мерного пространства V пространство $\Lambda^n(V^*)$ одномерно. Отметим, что ненулевой элемент пространства $\Lambda^n(V^*)$, то есть кососимметрическая полилинейная функция от n векторов из V, задает *ориентированный объем параллелепипеда*, натянутого на эти векторы. (Действительно, форма объема должна быть полилинейной для того, чтобы объем удовлетворял свойству аддитивности.)

Рассмотрим пространство $ST(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} ST^r(V)$. Введем на нем структуру алгебры.

Пусть $t_1 \in ST^{r_1}(V)$, $t_2 \in ST^{r_2}(V)$, $r = r_1 + r_2$. Рассмотрим в симметрической группе S_r подгруппу S_{r_1,r_2}, состоящую из всех перестановок $\sigma \in S_r$ таких, что $\sigma(i) \leqslant r_1$ для всех $i \leqslant r_1$. Выберем для каждого смежного класса $\alpha \in S_r/S_{r_1,r_2}$ его представитель σ_α. Положим

$$t_1 \cdot t_2 = \sum_{\alpha \in S_r/S_{r_1,r_2}} \sigma_\alpha(t_1 \otimes t_2).$$

Очевидно, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора представителей σ_α, и что введенное умножение коммутативно.

Аналогично определяется умножение в $\Lambda T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda T^r(V)$. Для любых кососимметричных тензоров $t_1 \in \Lambda T^{r_1}(V)$ и $t_2 \in \Lambda T^{r_2}(V)$ мы полагаем

$$t_1 \wedge t_2 = \sum_{\alpha \in S_r/S_{r_1,r_2}} \varepsilon(\sigma_\alpha) \cdot \sigma_\alpha(t_1 \otimes t_2)$$

(умножение в алгебре $\Lambda T(V)$ мы обозначаем символом $\wedge$, как и в $\Lambda(V)$; через $\varepsilon(\sigma)$ обозначен знак перестановки σ).

Упражнение 16. Доказать, что умножение в $\Lambda T(V)$ определено корректно и является *суперкоммутативным*, то есть удовлетворяет тождеству $t_1 \wedge t_2 = (-1)^{r_1 r_2} t_2 \wedge t_1$.

Упражнение 17. Доказать, что $ST(V)$ и $\Lambda T(V)$ являются ассоциативными алгебрами.

Согласно свойствам универсальности алгебр $S(V)$ и $\Lambda(V)$ существуют гомоморфизмы $\pi_e : S(V) \to ST(V)$ и $\pi_o : \Lambda(V) \to \Lambda T(V)$, тождественные на V.

Упражнение 18. Доказать, что отображение π_o является изоморфизмом для любого поля $\Bbbk$, а отображение π_e является изоморфизмом для любого поля $\Bbbk$ характеристики нуль.

Для $v \in V$ и $k = 0, 1, \ldots$ положим

$$v^{(k)} = \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{k}.$$

Упражнение 19. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис пространства V. Доказать, что тензоры вида $v_i^{(k)}$, где $i = 1, \ldots, n$ и $k = 0, 1, \ldots$, порождают алгебру $ST(V)$.

Заметим, что если $\operatorname{char} \mathbb{k} = 0$, то $v^{(k)} = \dfrac{v^k}{k!}$. Элемент $v^{(k)} \in ST^k(V)$ называют k*-ой разделенной степенью* элемента v, а алгебру $ST(V)$ — *алгеброй разделенных степеней*. k-ую разделенную степень пространства V часто обозначают через $S^{(k)}(V)$

Свёртка и внутреннее умножение

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{k}$. Обозначим через $T_q^p(V)$ тензорное произведение

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q}.$$

Рассмотрим отображение

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q} \to T_{q-1}^{p-1},$$

при котором

$$(v_1, \ldots, v_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \mapsto \xi_1(v_1) \cdot (v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_q).$$

Ясно, что это отображение полилинейно. Поэтому оно поднимается до линейного отображения $c_{11} : T_q^p(V) \to T_{q-1}^{p-1}$, называемого свёрткой по первому верхнему индексу с первым нижним индексом. Аналогично определяется свёртка c_{ab} по любой паре из верхнего и нижнего индексов, а также свёртка $c_{a_1,\ldots,a_k;b_1,\ldots,b_k}$ по нескольким верхним индексам и такому же числу нижних индексов.

В координатах свёртка записывается так:

$$(c_{11}t)_{j_1,\ldots,j_{q-1}}^{i_1,\ldots,i_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j_1,\ldots,j_{q-1}}^{i,i_1,\ldots,i_{p-1}}, \tag{4}$$

где $n = \dim V$.

Поскольку отображение свертки является инвариантно определенным, то есть не зависит от выбора базиса, то отображение

$$c_{11} : (\mathbb{k}^n)^{\otimes p} \otimes ((\mathbb{k}^n)^*)^{\otimes q} \to (\mathbb{k}^n)^{\otimes p-1} \otimes ((\mathbb{k}^n)^*)^{\otimes q-1},$$

заданное формулой (4), является GL_n-эквивариантным, то есть перестановочным с действием группы GL_n (см. обсуждение замены базиса и связанного с ним оператора в арифметическом линейном пространстве в разделе «Координатная запись тензоров»). Очень интересным является вопрос об описании всех GL_n-эквивариантных линейных отображений между пространствами вида $(\mathbb{k}^n)^{\otimes p} \otimes ((\mathbb{k}^n)^*)^{\otimes q}$. Оказывается, что все такие отображения получаются линейными комбинациями композиций свёрток, перестановок сомножителей, и умножений на GL_n-инвариантный тензор δ^i_j. Я надеюсь еще вернуться к этому в данном курсе лекций.

Для $\xi \in V^*$ и $t \in V^{\otimes r}$ положим $i_\xi(t) = c_{11}(t \otimes \xi)$. Отображение $i_\xi : V^{\otimes r} \to V^{\otimes r-1}$ называется *внутренним умножением* на ξ.

Внутреннее умножение на любой элемент $\xi \in V^*$ переводит элементы подпространств $ST^r(V)$ и $\Lambda T^r(V)$ в элементы подпространств $ST^{r-1}(V)$ и $\Lambda T^{r-1}(V)$ соответственно.

Упражнение 20. Доказать, что внутреннее умножение на любой элемент $\xi \in V^*$ является дифференцированием алгебры $ST(V)$ и *нечетным дифференцированием* алгебры $\Lambda T(V)$, то есть для любых $t_1, t_2 \in ST(V)$ выполнено равенство

$$i_\xi(t_1 \cdot t_2) = i_\xi(t_1) \cdot t_2 + t_1 \cdot i_\xi(t_2),$$

а для любых $t_1 \in \Lambda T^{r_1}(V)$ и $t_2 \in \Lambda T^{r_2}(V)$ выполнено равенство

$$i_\xi(t_1 \wedge t_2) = i_\xi(t_1) \wedge t_2 + (-1)^{r_1} t_1 \wedge i_\xi(t_2).$$